

MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Esame scritto - 27 novembre 2019 - Canale N-Z

1. Calcolare l'integrale

$$I = \int_{\gamma} \frac{z^{\frac{1}{3}}}{z^2 - 1} dz$$

dove γ va da 0 a $i\infty$ lungo l'asse immaginario positivo e la determinazione della radice cubica lungo questo asse è

$$z^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{i\pi}{6}} \sqrt[3]{\rho}$$

dove ρ è il modulo di z .

2. Calcolare per ogni $n \in \mathbb{Z}$ l'integrale

$$I_n = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(n\theta)}{5 + 3\cos\theta} d\theta \quad .$$

3. Determinare tutte le matrici A tali che

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

4. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - 3\frac{y'(x)}{x} - 5\frac{y(x)}{x^2} = x^2\theta(x-2) \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

con $x \in [1, +\infty)$, dove $\theta(x)$ è la funzione di Heaviside:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad .$$