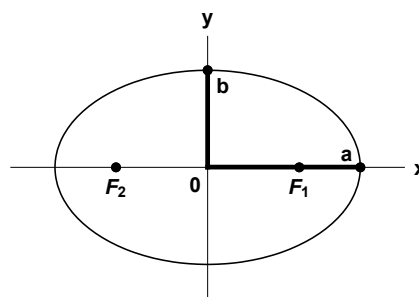


## MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

### Esame scritto - 2 luglio 2019 - Canale N-Z

1. [7 pt.] L'ellisse è il luogo geometrico dei punti del piano per i quali la somma delle distanze da due punti detti fuochi è costante. Indicando con  $2a$  questa somma e ponendo i fuochi sull'asse  $x$  e opposti rispetto all'origine come in figura, l'equazione dell'ellisse sul piano  $x-y$  è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



dove  $a$  e  $b$  sono reali positivi e  $a > b$ . Usare il teorema dei residui per calcolare l'area dell'ellisse.

2. [7 pt.] Calcolare l'integrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\sin x \cos x}{x^2 + x + 1} .$$

3. [5 pt.] Usando la decomposizione spettrale, trovare tutte le possibili matrici  $A$  tali che

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} .$$

4. [7 pt.] Calcolare la serie di Fourier in forma trigonometrica della funzione con periodo  $2\pi$  definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x \leq 0 \\ x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Discutere la convergenza della serie in  $x = \pm\pi$ .

5. [5 pt.] Si consideri l'operatore

$$T = -i \frac{d}{dx} + e^x$$

il cui dominio è

$$\mathcal{D}(T) = \{f, f' \in L^2[0, 1], f(0) = f(1)\} .$$

Determinare lo spettro puntuale di  $T$ .