

MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Esame scritto - 2 maggio 2022 - Canale Mf-Z

1. [15 pt.]

- Determinare tutti i poli della funzione

$$f(z) = \frac{1}{\sin(e^z)} .$$

- Usare il risultato precedente per calcolare l'integrale

$$I = \int_{\Gamma} f(z) dz$$

dove Γ è una circonferenza di raggio 2 centrata nell'origine e percorsa in senso antiorario.

- Calcolare lo stesso integrale nel caso in cui la circonferenza di raggio 2 è centrata in $z_0 = \pi i$. [Aiuto: si osservi che $\ln \pi \simeq 1.144$, $\ln(2\pi) \simeq 1.838$ e $\ln(3\pi) \simeq 2.243$]

2. [15 pt.]

- Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

calcolare e^{Ax} .

- Usare il risultato ottenuto per risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(x) = A\mathbf{y}(x) \\ \mathbf{y}(-1) = \mathbf{a} \end{cases}$$

dove

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

- Usare i due risultati precedenti e le proprietà della delta di Dirac per risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(x) = A\mathbf{y}(x) + \mathbf{b} \delta(x) \\ \mathbf{y}(-1) = \mathbf{a} \end{cases}$$

dove

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 - e \\ e \end{pmatrix} .$$