MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Esame scritto - 30 Giugno 2020 - Canale M-Z
[Esame in modalità telematica]

1a. **[15 pt.]** Data la funzione

$$f(z) = \frac{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}{(2z \pm i)(z \mp i)}$$

si scelga come taglio il segmento che congiunge i due punti di diramazione passando per $z = 0$ e la determinazione in cui $(z^2-1)^{\frac{1}{2}}$ è immaginaria positiva (negativa) per $z = 0$ $\substack{\text{sotto} \\ \text{sopra}}$ il taglio.

- Calcolare i due integrali

$$I_i = \int_{\gamma_i} f(z)\mathrm{d}z \quad i = 1, 2$$

dove γ_i sono le curve percorse in senso antiorario che circondano solamente uno dei due poli semplici;

- calcolare il residuo all'infinito;
- usare i risultati precedenti per calcolare

$$I_3 = \int_{\gamma_3} f(z)\mathrm{d}z$$

dove γ_3 è la curva percorsa in senso antiorario che circonda solamente il taglio.

1b. **[15 pt.]** Data la funzione

$$f(z) = \frac{(z^2+1)^{\frac{1}{2}}}{(2z \pm 1)(z \mp 1)}$$

si scelga come taglio il segmento che congiunge i due punti di diramazione passando per $z = 0$ e la determinazione in cui $(z^2+1)^{\frac{1}{2}}$ è reale positiva (negativa) per $z = 0$ a $\substack{\text{sinistra} \\ \text{destra}}$ del taglio.

- Calcolare i due integrali

$$I_i = \int_{\gamma_i} f(z) \mathrm{d}z \quad i = 1, 2$$

dove γ_i sono le curve percorse in senso antiorario che circondano solamente uno dei due poli semplici;

- calcolare il residuo all'infinito;
- usare i risultati precedenti per calcolare

$$I_3 = \int_{\gamma_3} f(z) \mathrm{d}z$$

dove γ_3 è la curva percorsa in senso antiorario che circonda solamente il taglio.

2a., 2b. **[15 pt.]** Sia data la funzione

$$f(x) = \cos(ax) \qquad x \in (-\pi, \pi)$$

dove a è reale e $a \notin \mathbb{Z}$.

- Determinare la sua serie di Fourier in forma trigonometrica;
- discutere la convergenza puntuale in $x = \pi$;
- usare la serie ottenuta per dimostrare che

$$\text{2a.)} \quad \frac{1}{\sin \frac{a\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a + 2n} \ ,$$

$$\text{2b.)} \quad \cot(a\pi) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a + n} \ .$$

2c. **[15 pt.]** Sia data la funzione

$$f(x) = \sin(ax) \qquad x \in (-\pi, \pi)$$

dove a è reale e $a \notin \mathbb{Z}$.

- Determinare la sua serie di Fourier in forma trigonometrica;
- discutere la convergenza puntuale in $x = \pi$;
- usare la serie ottenuta per dimostrare che

$$\frac{1}{\cos \frac{a\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a + 2n + 1} \ .$$

Nota: ogni compito presenta uno solo tra gli esercizi 1a e 1b con una delle possibili scelte di determinazione. Ci sono quindi 8 possibili varianti per il primo esercizio. Ogni compito presenta inoltre uno solo tra esercizi 2a, 2b e 2c (i primi due punti degli esercizi 2a e 2b sono uguali). Ad ogni studente viene chiesto di risolvere una specifica combinazione.