

MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Esame scritto - 3 maggio 2023 - Canale O-Z

1. [5 pt.] Determinare i punti di diramazione e il numero di determinazioni della funzione

$$f(z) = z^{\frac{1}{3}} \cos z^{\frac{1}{2}} .$$

2. [10 pt.]

- Si calcoli integrale

$$\int_{\gamma} \left(\frac{z^2 + z - 2}{(z-1)(z-2)} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \right) dz ,$$

dove γ è una circonferenza di raggio 4 centrata nell'origine e percorsa in senso antiorario, considerando i residui della funzione integranda corrispondenti alle singolarità interne alla circonferenza.

- Trovare il residuo in $z = \infty$ della funzione integranda e verificare la consistenza con il risultato del punto precedente.

3. [5 pt.] Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2i & 3 \\ -2 & i \end{pmatrix} ,$$

determinare $f(A) = A^{\frac{1}{2}}$ dove per $f(z) = z^{\frac{1}{2}}$ si sceglie la determinazione reale negativa sull'asse reale positivo e il taglio lungo l'asse reale negativo.

4. [10 pt.]

- Calcolare la trasformata di Fourier delle funzioni

$$f_1(x) = e^{-|x|}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

- Utilizzare i risultati del punto precedente per calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-|x-y|} dy .$$