

MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Esame scritto - 5 luglio 2022 - Canale O-Z

1. [15 pt.]

- Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(x+1)^2} dx \quad .$$

- Utilizzare il risultato del punto precedente per calcolare l'integrale

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x} \log x}{(x+1)^2} dx \quad .$$

2. [15 pt.]

- Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} ,$$

si calcoli e^{Ax} (dove x è un numero reale) usando un metodo a scelta.

- Si usi il risultato precedente per risolvere il problema omogeneo di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(x) - A\mathbf{y}(x) = 0 \\ \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

per il vettore $\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$.

- Usando i risultati precedenti, si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(x) - A\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \theta(x - \log 2) \\ \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

dove θ è la funzione di Heaviside. [Aiuto: la soluzione particolare del problema non omogeneo è $\mathbf{y}(x)$ costante.]