

## MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Esame scritto - 7 novembre 2022 - Canale O-Z

1. [12 pt.]

- Determinare tutti i poli (ed il loro ordine) della funzione

$$f(z) = \frac{z - \pi}{(\sin z)^2 \cos z} .$$

- Usare il risultato precedente per calcolare l'integrale

$$I = \int_{\Gamma} f(z) dz$$

dove  $\Gamma$  è una circonferenza centrata in  $z_0 = 0$  di raggio  $R = 2$  percorsa in senso antiorario.

- Calcolare lo stesso integrale nel caso in cui la circonferenza abbia lo stesso raggio ma sia centrata in  $z_1 = \frac{\pi}{2}$ .

2. [12 pt.]

- Calcolare la serie di Fourier in forma trigonometrica della funzione con periodo  $2\pi$  definita da

$$f(x) = x^2 \quad x \in [0, 2\pi] .$$

- Discutere la convergenza puntuale. In particolare determinare a che valore converge la serie di Fourier per  $x = 0$ . Determinare la serie numerica che si ottiene e la sua somma.
- Usando l'identità di Parseval e la somma della serie numerica del punto precedente, determinare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} .$$

3. [6 pt.]

Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2i - 1 & i + 1 \\ 2 & -i \end{pmatrix}$$

calcolare  $e^A$  usando la decomposizione spettrale.

(Aiuto: ricordare che  $(1 \pm i)^2 = \pm 2i$ .)