

## MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Esame scritto - 9 febbraio 2022 - Canale Mf-Z

1. [15 pt.] Si calcoli l'integrale

$$I = \int_{\gamma} \frac{z^{\frac{1}{2}} dz}{z^3 - 1}$$

dove  $\gamma$  è la semiretta sul primo quadrante del piano complesso percorsa dall'origine fino a infinito che forma un angolo di  $\frac{\pi}{3}$  con l'asse reale positivo, e la determinazione per  $z^{\frac{1}{2}}$  lungo  $\gamma$  è

$$z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\rho} e^{-\frac{5i\pi}{6}}.$$

2. [15 pt.] Si consideri l'equazione differenziale

$$\mathbf{y}'(x) = A\mathbf{y}(x) + \lambda\mathbf{y}(x)$$

dove

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},$$

$A$  è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

e  $\lambda$  è un numero complesso.

- Risolvere il problema di Cauchy con condizione iniziale

$$\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Determinare i valori di  $\lambda$  tali che il problema al bordo

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}(2\pi)$$

ha soluzione.