

MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Esame scritto - 9 settembre 2021 - Canale Mf-Z

1. [10 pt.] Si consideri la funzione polidroma

$$f(z) = \log \frac{z+1}{z-1} .$$

- Determinare i punti di diramazione.
- Si consideri come taglio il segmento che unisce i punti di diramazione. Sul foglio in cui la funzione all'infinito è nulla, calcolare l'integrale

$$\int_{\Gamma} f(z) dz$$

dove Γ è una circonferenza centrata nell'origine e raggio 2, percorsa in senso antiorario.

2. [10 pt.] Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} ,$$

usando la decomposizione spettrale determinare $f(A)$, dove

$$f(z) = (-z)^{\frac{1}{2}} ,$$

con $f(z)$ reale positiva per z reale negativo e il taglio lungo l'asse immaginario positivo.

3. [10 pt.] Usando le proprietà della trasformata di Fourier, risolvere l'equazione alle derivate parziali

$$\partial_t f(x, t) = t \partial_x^2 f(x, t) \quad t \geq 0$$

con condizione iniziale

$$f(x, 0) = \delta(x) .$$

[Aiuto: si ricordi che $\int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{-ap^2+bp} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}$, con a reale positivo.]