MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Soluzioni esame scritto - 10 settembre 2020 - Canale M-Z

1. Per risolvere il primo integrale, introduciamo la funzione polidroma

$$f_1(z) = \frac{z^a}{z^2+1}$$

e prendiamo come taglio l'asse reale positivo. Scegliamo inoltre la determinazione tale che, per z reale positivo sopra il taglio,

$$z^a_{\text{sopra}} = x^a \quad (\text{reale positivo}) \ .$$

Di conseguenza, sotto il taglio

$$z^a_{\text{sotto}} = x^a e^{2\pi i a} \ .$$

I valori di a dati sono tali che vale il lemma di Jordan, per cui possiamo risolvere l'integrale I_1 considerando l'integrale di $f_1(z)$ lungo la curva Γ che circonda il taglio e si chiude all'infinito percorsa in senso antiorario. Otteniamo

$$\int_\Gamma f_1(z)\mathrm{d}z = \left(1 - e^{2\pi i a}\right) I_1 \ .$$

Questo integrale si calcola utilizzando il teorema dei residui. L'integrando ha poli semplici in

$$z_1 = e^{\frac{i\pi}{2}} \qquad z_2 = e^{\frac{3i\pi}{2}}$$

da cui

$$\int_\Gamma f_1(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \left(\mathrm{Res}_{z=z_1} f_1(z) + \mathrm{Res}_{z=z_2} f_1(z)\right) = 2\pi i \left(\frac{e^{\frac{i\pi a}{2}}}{2i} - \frac{e^{\frac{3i\pi a}{2}}}{2i} \right) \ .$$

Si ottiene quindi

$$I_1 = \pi \frac{e^{\frac{i\pi a}{2}} - e^{\frac{3i\pi a}{2}}}{1 - e^{2\pi i a}} = \pi \frac{e^{\frac{-i\pi a}{2}} - e^{\frac{i\pi a}{2}}}{e^{-i\pi a} - e^{i\pi a}}$$

ovvero

$$I_1 = \pi \frac{\sin\left(\frac{\pi a}{2}\right)}{\sin(\pi a)} = \frac{\pi}{2\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)} \ .$$

Lo stesso risultato si ottiene sfruttando il fatto che il denominatore di $f_1(z)$ è pari, e quindi possiamo considerare l'integrale di $f_1(z)$ lungo la curva Γ' corrispondente a tutto l'asse reale, che passa sopra al taglio e si chiude all'infinito nel piano complesso superiore. Abbiamo

$$\int_{\Gamma'} f_1(z)\mathrm{d}z = \left(1 + e^{i\pi a}\right) I_1 \ .$$

In questo caso aggiriamo solo il polo z_1 per cui

$$\int_{\Gamma'} f_1(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \frac{e^{\frac{i\pi a}{2}}}{2i} = \pi e^{\frac{i\pi a}{2}}$$

da cui

$$I_1 = \pi \frac{e^{\frac{i\pi a}{2}}}{1 + e^{i\pi a}} = \frac{\pi}{2\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)} \ .$$

Per il secondo integrale la procedura è la stessa. Consideriamo la funzione polidroma

$$f_2(z) = \frac{z^{ib}}{z^2 + 1}$$

e ricordiamo che, scrivendo $z = \rho e^{i\theta}$,

$$z^{ib} = e^{ib \ln z} = e^{ib \ln \rho} e^{-b\theta} \ .$$

Con lo stesso taglio di prima, scegliamo $\theta = 0$ sopra il taglio, in modo che

$$z^{ib}_{\text{sopra}} = e^{i \ln x}$$

e quindi $1^{ib} = 1$. Di conseguenza, sotto il taglio

$$z^{ib}_{\text{sotto}} = e^{-2\pi b} e^{i \ln x} \ .$$

Otteniamo

$$\int_{\Gamma} f_2(z)\mathrm{d}z = \left(1 - e^{-2\pi b}\right) I_2$$

e usando il teorema dei residui

$$\int_{\Gamma} f_2(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \left(\mathrm{Res}_{z=z_1} f_2(z) + \mathrm{Res}_{z=z_2} f_2(z)\right) = 2\pi i \left(\frac{e^{-\frac{\pi b}{2}}}{2i} - \frac{e^{-\frac{3\pi b}{2}}}{2i} \right) ,$$

da cui si trova
$$I_2 = \pi \frac{\sinh\left(\frac{\pi b}{2}\right)}{\sinh(\pi b)} = \frac{\pi}{2\cosh\left(\frac{\pi b}{2}\right)} \ .$$
Come per il primo integrale, possiamo anche considerare la curva Γ'. Otteniamo
$$\int_{\Gamma'} f_2(z)\mathrm{d}z = \left(1 + e^{-\pi b}\right) I_2 \ .$$
In questo caso aggiriamo solo il polo z_1 per cui
$$\int_{\Gamma'} f_2(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \frac{e^{-\frac{\pi b}{2}}}{2i} = \pi e^{-\frac{\pi b}{2}}$$
da cui
$$I_2 = \pi \frac{e^{-\frac{\pi b}{2}}}{1 + e^{-\pi b}} = \frac{\pi}{2\cosh\left(\frac{\pi b}{2}\right)} \ .$$

2. Risolviamo il caso della matrice
$$A(w) = \frac{1}{2w}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ .$$
Il caso della matrice con termini fuori-diagonali opposti si ottiene automaticamente cambiando il segno a tutti i termini fuori-diagonali. La matrice ha autovalori $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = \frac{1}{w}$, e il risolvente è
$$R_z(A(w)) = \frac{1}{z\left(z - \frac{1}{w}\right)}\begin{pmatrix} z - \frac{1}{2w} & \frac{1}{2w} \\ \frac{1}{2w} & z - \frac{1}{2w} \end{pmatrix} \ .$$
I proiettori sono
$$P_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \ , \qquad P_{\frac{1}{w}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \ .$$
Si ottiene quindi
$$f(A(w)) = P_0 e^0 + P_{\frac{1}{w}} e^{\frac{1}{w}} \ .$$
Per calcolare l'integrale, è sufficiente osservare che la funzione $e^{\frac{1}{w}}$ ha una singolarità essenziale in $w = 0$ e il residuo è 1. Quindi
$$\int_\gamma f(A(w))\mathrm{d}w = 2\pi i P_{\frac{1}{w}} = \begin{pmatrix} \pi i & \pi i \\ \pi i & \pi i \end{pmatrix} \ .$$

3. Risolviamo l'equazione

$$Tf = \lambda f$$

con condizione al bordo $f(\pi) = f(\pi)$. Otteniamo

$$f(x) = f(-\pi) \exp\left(i \int_{-\pi}^{x} [\theta(x') + \lambda] \mathrm{d}x' \right) \ .$$

Per $-\pi \leq x < 0$ la soluzione è

$$f(x) = f(-\pi) e^{i\lambda(x+\pi)}$$

mentre per $0 \leq x \leq \pi$ abbiamo

$$f(x) = f(-\pi) e^{i\lambda(x+\pi)+ix} \ .$$

Calcolando la soluzione per $0 \leq x \leq \pi$ in $x = \pi$ otteniamo

$$f(\pi) = f(-\pi) e^{2\pi i\lambda + i\pi}$$

e quindi gli autovalori soddisfano

$$2\pi\lambda_k + \pi = 2k\pi$$

ovvero

$$\lambda_k = k + \frac{1}{2}$$

con k intero.