MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Soluzioni esame scritto - 11 maggio 2020 - Canale N-Z

1. Consideriamo la funzione polidroma

$$f(z) = \frac{z^{\frac{1}{3}}}{1+z^2}$$

che ha poli semplici in $z_1 = i$ e $z_2 = -i$. Scegliamo il taglio lungo l'asse reale positivo e scegliamo sopra il taglio la determinazione tale che $f(z)$ sia reale positiva. Con questa determinazione, abbiamo

$$(z_1)^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{i\pi}{6}} \qquad (z_2)^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{i\pi}{2}} \ .$$

Consideriamo ora

$$\int_\Gamma f(z) \mathrm{d}z \ ,$$

dove Γ è la curva chiusa percorsa in senso antiorario che circonda il taglio e chiude all'infinito. Si ha quindi

$$\int_\Gamma f(z) \mathrm{d}z = I(1 - e^{\frac{2\pi i}{3}}) = 2\pi i \left(\mathrm{Res}[f(z), z = z_1] + \mathrm{Res}[f(z), z_2] \right) \ ,$$

dove I è l'integrale che vogliamo calcolare e i residui valgono

$$\mathrm{Res}[f(z), z = e^{\frac{i\pi}{2}}] = \frac{e^{\frac{i\pi}{6}}}{2i} \ ,$$

$$\mathrm{Res}[f(z), z = e^{\frac{i3\pi}{2}}] = -\frac{e^{\frac{i\pi}{2}}}{2i} \ .$$

Si ottiene quindi

$$I e^{\frac{i\pi}{3}} \left(e^{-\frac{i\pi}{3}} - e^{\frac{i\pi}{3}} \right) = \pi \left(e^{\frac{i\pi}{6}} - e^{\frac{i\pi}{2}} \right) = e^{\frac{i\pi}{3}} \left(e^{-\frac{i\pi}{6}} - e^{\frac{i\pi}{6}} \right) \ ,$$

da cui si ottiene

$$I = \pi \frac{\sin(\frac{\pi}{6})}{\sin(\frac{\pi}{3})} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

2. La matrice A ha autovalori $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2$ con molteplicità algebrica e geometrica pari a 1. L'operatore risolvente è

$$R_z(A) = \frac{1}{z(z-2)} \begin{pmatrix} z-1 & 1 \\ 1 & z-1 \end{pmatrix} ,$$

e i proiettori sono

$$P_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} , \qquad P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

Si ottiene quindi

$$f(A) = P_0 e^0 + P_2 e^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^2+1 & e^2-1 \\ e^2-1 & e^2+1 \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} \cosh 1 & \sinh 1 \\ \sinh 1 & \cosh 1 \end{pmatrix}$$

3. Cerchiamo soluzioni dell'equazione omogenea nella forma $y(x) = x^\alpha$. Troviamo

$$\alpha = 2 .$$

La presenza della delta implica che la funzione $y(x)$ ha una discontinuità in $x = 2$, ovvero

$$y(2^+) - y(2^-) = 1 .$$

Scriviamo quindi

$$y(x) = \begin{cases} A_- x^2 & 1 \le x < 2 \\ A_+ x^2 & x > 2 \end{cases} .$$

La condizione iniziale fornisce $A_- = 1$ mentre la discontinuità della funzione in $x = 2$ è

$$4A_+ - 4 = 1 ,$$

da cui si trova $A_+ = \frac{5}{4}$. La soluzione è quindi

$$y(x) = x^2 + \frac{1}{4} x^2 \theta(x-2) ,$$

dove $\theta(x)$ è la funzione di Heaviside.