MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Soluzioni esame scritto - 13 maggio 2021 - Canale M-Z

1. Abbiamo
$$f(z) = (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} (z^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \ .$$
Consideriamo z sull'asse reale. Per z reale maggiore di 1 sopra il taglio la funzione è positiva, e possiamo prendere separatamente $(z^2+1)^{\frac{1}{2}}$ e $(z^2-1)^{\frac{1}{2}}$ positivi. Quindi possiamo prendere sull'intero asse reale $(z^2+1)^{\frac{1}{2}}$ positivo, dal momento che l'argomento è sempre reale positivo e non si annulla mai. Quindi sull'asse reale ci possiamo limitare a studiare la funzione
$$(z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = (z+1)^{\frac{1}{2}} (z-1)^{\frac{1}{2}} \ .$$
Di nuovo, possiamo prendere per z reale maggiore di 1 sopra il taglio separatamente $(z+1)^{\frac{1}{2}}$ e $(z-1)^{\frac{1}{2}}$ positivi. Inoltre $(z+1)^{\frac{1}{2}}$ rimane positivo per z reale tra -1 e 1, e quindi ci interessa solo studiare $(z-1)^{\frac{1}{2}}$. Per z intorno a 1 possiamo scrivere $z = 1 + \epsilon e^{i\theta}$ e quindi
$$(z-1)^{\frac{1}{2}} \simeq \sqrt{\epsilon} e^{\frac{i\theta}{2}} \ .$$
Per avere la funzione positiva a destra prendiamo $\theta = 0$ sopra il taglio, per cui ruotando di π otteniamo che la funzione è immaginaria positiva a sinistra del taglio, mentre ruotando di 2π otteniamo che è reale negativa sotto il taglio. La funzione rimane immaginaria positiva per z reale tra -1 e 1. Questo implica che
$$f(0) = i \ .$$
In realtà $(z-1)^{\frac{1}{2}}$ rimane immaginaria positiva per ogni z reale minore di 1, e quindi intorno a -1 dobbiamo considerare solo $(z+1)^{\frac{1}{2}}$, che essendo reale positiva a destra del taglio diventa immaginaria positiva sopra il taglio di sinistra e immaginaria negativa sotto. Ricordando che $(z-1)^{\frac{1}{2}}$ è immaginaria positiva, otteniamo complessivamente che $f(z)$ è reale negativa sopra il taglio di sinistra e reale positiva sotto.

Per studiare z immaginari ricordiamo che in $z = 0$ abbiamo che $(z^2-1)^{\frac{1}{2}}$ è i, e quindi la funzione resta immaginaria positiva su tutto l'asse immaginario. Possiamo quindi studiare semplicemente $(z^2+1)^{\frac{1}{2}}$, ricordandoci che alla fine dovremo moltiplicare quello che otteniamo per un numero immaginario positivo. Abbiamo che

$$(z^2+1)^{\frac{1}{2}} = (z+i)^{\frac{1}{2}}(z-i)^{\frac{1}{2}}$$

è reale positiva per z immaginario tra $-i$ e i. Prendiamo z vicino a i, ovvero $z = i + \epsilon e^{i\theta}$. Otteniamo

$$(z^2+1)^{\frac{1}{2}} =\simeq \sqrt{2i\epsilon} e^{\frac{i\theta}{2}} = \sqrt{2\epsilon} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{\frac{i\theta}{2}}$$

e per avere un risultato reale sotto i prendiamo sotto $\theta = -\frac{\pi}{2}$. Ruotando di π in senso antiorario otteniamo un numero immaginario positivo a destra, e analogamente ruotando in senso orario un numero immaginario negativo a sinistra. Ricordando che dobbiamo moltiplicare tutto per un numero immaginario positivo, scopriamo che $f(z)$ è reale negativa a destra del taglio sopra e reale positiva a sinistra. Infine, si dimostra allo stesso modo che $f(z)$ è reale positiva a destra del taglio sotto e reale negativa a sinistra.

Consideriamo ora l'integrale

$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{zf(z)}$$

dove Γ è la curva in figura. Abbiamo

$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{zf(z)} = \sum_{n=1}^{8} \int_{\gamma_n} \frac{\mathrm{d}z}{zf(z)} \ .$$

Osserviamo innanzi tutto che lungo tutte le γ_n $\mathrm{d}z/z = \mathrm{d}\rho/\rho$, ovvero la fase si elide. Inoltre lungo le γ_n con n dispari $f(z)$ è positiva, mentre lungo le γ_n con n pari $f(z)$ è negativa, e osservando il percorso di integrazione deduciamo che l'integrale è 8 volte l'integrale che dobbiamo calcolare. Calcoliamo l'integrale usando il teorema dei residui. Abbiamo

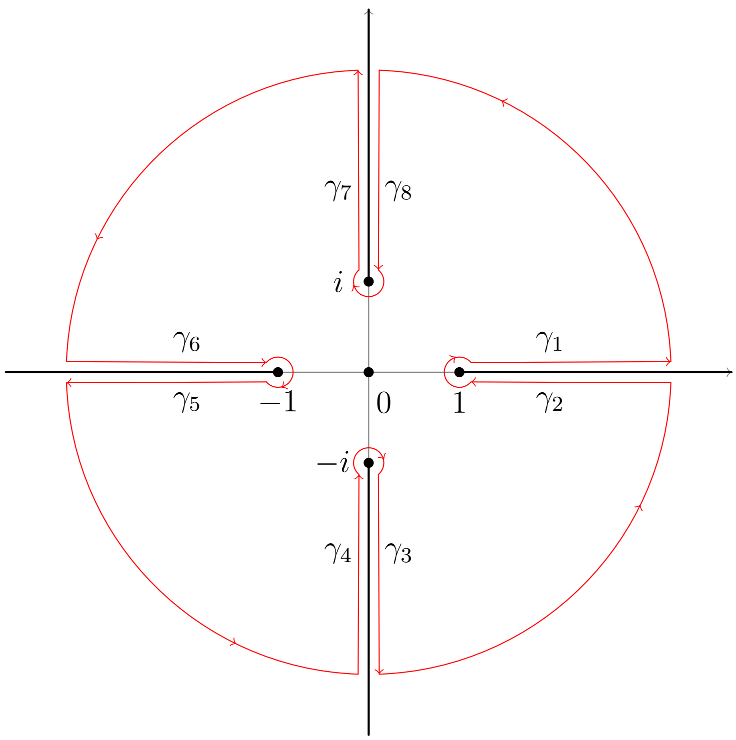
$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{zf(z)} = 2\pi i \mathrm{Res}_{z=0} \frac{1}{zf(z)} = \frac{2\pi i}{f(0)} \ .$$

Sappiamo che $f(0) = i$, e quindi

$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{zf(z)} = 2\pi \ ,$$

da cui

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^4-1}} = \frac{\pi}{4} \ .$$



2. Calcoliamo i coefficienti di Fourier in forma esponenziale. Abbiamo

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\pi \mathrm{d}x e^{-inx}(\pi - x) \ .$$

Troviamo

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\pi^2}{2}$$

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{i\pi}{n} - \frac{1}{n^2}((-1)^n - 1) \right] \qquad n \neq 0$$

ovvero

$$a_0 = \frac{\pi}{2} \qquad a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2} & n \text{ dispari} \end{cases} \qquad b_n = \frac{1}{n} \qquad .$$

Si ottiene quindi la serie

$$\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \ .$$

La funzione periodicizzata ha una discontinuità in $x = 2k\pi$. Quindi in $x = 0$ la serie converge al valor medio tra il valore a sinistra di $x = 0$ (ovvero zero) e il valore a destra (ovvero π). Quindi la serie converge a $\frac{\pi}{2}$. Negli altri punti la funzione è continua, per cui la serie converge al valore della funzione nel punto, che è $\frac{\pi}{2}$ per $x = \frac{\pi}{2}$ e zero per gli altri due casi.

Scriviamo le serie numeriche. Per $x = 0$ il seno si annulla e il coseno vale 1, per cui si ottiene

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

ovvero

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \ .$$

Per $x = \frac{\pi}{2}$ abbiamo che $\cos(2n+1)x$ è sempre nullo, mentre $\sin nx$ è zero per n pari, 1 per $n = 1, 5, 9, \ldots$ e -1 per $n = 3, 7, 11, \ldots$. Si ottiene quindi

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

ovvero

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \ .$$

Per $x = \pi$ di nuovo il seno si annulla, mentre $\cos(2n+1)x = -1$, da cui

$$0 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

che coincide con la prima serie. Infine per $x = \frac{3\pi}{2}$ il coseno si annulla mentre $\sin nx$ è zero per n pari, -1 per $n = 1, 5, 9, ...$ e 1 per $n = 3, 7, 11, ...$ Si ottiene quindi

$$0 = \frac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

che coincide con la seconda serie.