MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Soluzioni esame scritto - 15 novembre 2021 - Canale Mf-Z

1. La funzione ha poli per $z^2 = 2k\pi i$, con k intero. Quindi l'origine è un polo, corrispondente al caso $k = 0$, mentre per $k \neq 0$ dobbiamo risolvere
$$z^2 = 2k\pi e^{\frac{i\pi}{2}} \ .$$
Distinguiamo quindi tra k positivo e negativo. Per k positivo abbiamo le soluzioni
$$z_{1k} = \sqrt{2k\pi} e^{\frac{i\pi}{4}} \qquad z_{2k} = \sqrt{2k\pi} e^{\frac{5i\pi}{4}}$$
mentre per k negativo abbiamo
$$z_{3k} = \sqrt{-2k\pi} e^{\frac{3i\pi}{4}} \qquad z_{4k} = \sqrt{-2k\pi} e^{\frac{7i\pi}{4}} \ .$$
Riassumendo, abbiamo poli per
$$z_0 = 0 \qquad z_{nk} = \sqrt{2k\pi} e^{\frac{i(1+2n)\pi}{4}} \qquad n = 0, 1, 2, 3 \qquad k \text{ intero positivo} \ .$$
Per studiare l'ordine dei poli, espandiamo intorno a questi valori di z il denominatore di $f(z)$. Intorno a z_0 abbiamo
$$\exp(z^2) - 1 \simeq 1 + z^2 + \frac{1}{2} z^4 + ... - 1 = z^2 (1 + \frac{1}{2} z^2 + ...) \ ,$$
e considerando la presenza di z a numeratore segue che z_0 è un polo semplice con residuo uguale a 1. Per z_{nk} invece abbiamo
$$\exp(z^2) - 1 \simeq 1 + 2z_{nk}(z - z_{nk}) + ... - 1 = 2z_{nk}(z - z_{nk})(1 + ...) \ ,$$
dove stiamo trascurando potenze positive e maggiori di 1 di $z - z_{nk}$. Tutti questi poli sono quindi poli semplici, e considerando la presenza di z a numeratore segue che hanno tutti residuo uguale a $\frac{1}{2}$.

   Per calcolare l'integrale, dobbiamo capire quanti poli sono circondati dalla curva. Chiaramente z_0 è dentro Γ, mentre il modulo di z_{nk} è $\sqrt{2k\pi}$, che è minore di 3 solamente per $k = 1$. Di conseguenza la curva circonda anche i quattro poli z_{n1}, $n = 0, 1, 2, 3$. Considerando il valore dei residui, otteniamo
$$I = 2\pi i \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 6\pi i \ .$$

2. La trasformata di Fourier di $f(x,1)$ è

$$\hat{f}(p,1) = e^{-\frac{p^2}{2}} \ .$$

Effettuando la trasformata di Fourier dell'equazione rispetto a x, otteniamo l'equazione

$$\partial_t \hat{f}(p,t) = -\frac{p^2}{t}\hat{f}(p,t) \ ,$$

che è un'equazione del primo ordine in t. La soluzione è

$$\hat{f}(p,t) = \hat{f}(p,1)e^{-p^2 \log t} \ ,$$

e sostituendo la condizione iniziale troviamo

$$\hat{f}(p,t) = e^{-p^2\left(\frac{1}{2}+\log t\right)} \ .$$

Per trovare la soluzione dell'equazione data bisogna quindi effettuare l'antitrasformata di Fourier, e il risultato è

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+2\log t}} e^{-\frac{x^2}{2(1+2\log t)}} \ .$$

3. La matrice ha autovalori $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = i$. La matrice risolvente è

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{z} & \frac{i}{z(z-i)} \\ 0 & \frac{1}{z-i} \end{pmatrix}$$

da cui si trovano i proiettori

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Abbiamo

$$\cos(i\pi A) = \cos(i\pi\lambda_1)P_0 + \cos(i\pi\lambda_2)P_i = \cos 0 P_0 + \cos(-\pi)P_i = P_0 - P_i \ ,$$

ovvero

$$\cos(i\pi A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ .$$

Analogamente

$$\sin(i\pi A) = \sin(i\pi\lambda_1)P_0 + \sin(i\pi\lambda_2)P_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

L'identità trigonometrica è verificata perché

$$\cos^2(i\pi A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$