MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Soluzioni esame scritto - 16 gennaio 2023 - Canale O-Z

1. Calcoliamo I_1 usando il teorema dei residui. Possiamo considerare l'integrale della funzione $\frac{1}{z^3+1}$ lungo il cammino il figura, dove γ_2 forma un angolo $\frac{2\pi}{3}$ con l'asse x. L'integrale lungo γ_2 è quindi uguale a

$$-e^{\frac{2\pi i}{3}} I_1 \ .$$

La funzione ha poli semplici in

$$z_1 = e^{\frac{\pi i}{3}} \qquad z_2 = -1 \qquad z_3 = e^{-\frac{i\pi}{3}} \ ,$$

ma solo z_1 è contenuto nella curva. Si ottiene quindi

$$(1 - e^{\frac{2\pi i}{3}}) I_1 = 2\pi i \mathrm{Res}_{z=z_1} \frac{1}{z^3+1}$$

ovvero

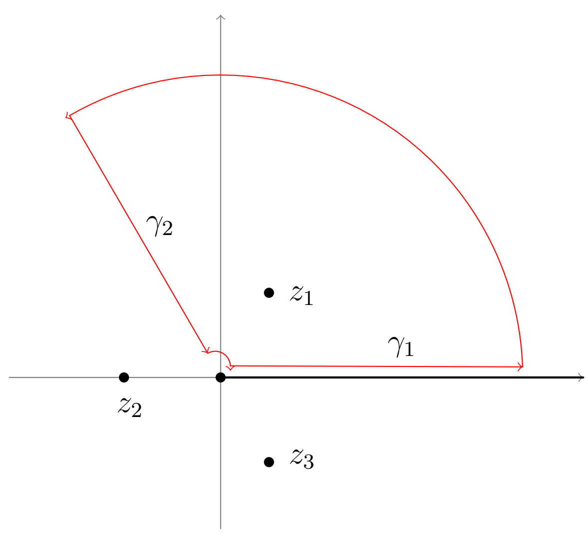
$$(1 - e^{\frac{2\pi i}{3}}) I_1 = 2\pi i \frac{1}{3} e^{-\frac{2\pi i}{3}}$$

da cui

$$I_1 = \frac{2\pi i}{3} \frac{1}{2i} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}}$$

e sostituendo $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ si ottiene

$$I_1 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \ .$$



Per calcolare I_2, consideriamo il taglio del logaritmo lungo l'asse reale positivo, e prendiamo il logaritmo reale sopra al taglio. Possiamo di nuovo considerare il cammino in figura, dove γ_1 è sopra al taglio. Lungo γ_2 abbiamo

$$z = \rho\; e^{\frac{2\pi i}{3}} \to \ln z = \ln\rho + \frac{2\pi i}{3} \ .$$

Quindi l'integrale lungo la curva è

$$(1 - e^{\frac{2\pi i}{3}})I_2 - \frac{2\pi i}{3} e^{\frac{2\pi i}{3}} I_1 = 2\pi i \mathrm{Res}_{z=z_1} \frac{\ln z}{z^3+1} \ .$$

Il residuo è

$$\mathrm{Res}_{z=z_1} \frac{\ln z}{z^3+1} = \frac{\pi i}{3} \frac{1}{3e^{\frac{2\pi i}{3}}}$$

e sostituendo questo valore e il valore di I_1 si ottiene

$$(1 - e^{\frac{2\pi i}{3}})I_2 = \frac{4\pi^2 i}{9\sqrt{3}} e^{\frac{2\pi i}{3}} - \frac{2\pi^2}{9} e^{\frac{-2\pi i}{3}} \ .$$

Sapendo che

$$e^{\frac{2\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad e^{\frac{-2\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

si ottiene

$$\frac{3}{2}\left(1 - \frac{i}{\sqrt{3}}\right) I_2 = -\frac{\pi^2}{9}\left(1 - \frac{i}{\sqrt{3}}\right)$$

ovvero

$$I_2 = -\frac{2\pi^2}{27} \ .$$

2. La matrice ha autovalore 1 e non è diagonalizzabile. Gli operatori spettrali sono

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Abbiamo

$$f(A) = f(1)P_1 + f'(1)J_1 \ .$$

Calcoliamo $f(1)$ e $f'(1)$:

$$f(1) = e^{\left(e^{i\pi}\right)} = e^{-1} \qquad f'(1) = e^{\left(e^{i\pi z}\right)} \pi i e^{i\pi z}|_{z=1} = -\pi i e^{-1}$$

da cui

$$f(A) = e^{-1}P_1 - \pi i e^{-1} J_1 = e^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -2\pi i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

3. Calcoliamo la trasformata di Fourier di $f(x, 0)$. Usiamo l'identità

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos(2x) + 1) = \frac{1}{4}(e^{2ix} + e^{-2ix}) + \frac{1}{2}$$

da cui troviamo

$$\hat{f}(p, 0) = \sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{4}\delta(p-2) + \frac{1}{4}\delta(p+2) + \frac{1}{2}\delta(p)\right) .$$

L'equazione per $\hat{f}(p, t)$ è

$$\partial_t \hat{f}(p, t) = -t^2 p^2 \hat{f}(p, t)$$

la cui soluzione è

$$\hat{f}(p, t) = \hat{f}(p, 0) e^{-\frac{t^3 p^2}{3}} .$$

Antitrasformando si ottiene

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p \; e^{-\frac{t^3 p^2}{3}} \left(\frac{1}{4}\delta(p-2) + \frac{1}{4}\delta(p+2) + \frac{1}{2}\delta(p)\right) e^{ipx}$$

ovvero

$$f(x, t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{4t^3}{3}} \cos(2x) + \frac{1}{2} .$$