MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Soluzioni esame scritto - 16 giugno 2020 - Canale M-Z

1. L'integrando è pari, quindi possiamo scrivere
$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(\alpha x)}{x^2+\beta^2}\mathrm{d}x \ .$$
Abbiamo
$$I = \frac{1}{4i}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i\alpha x}}{x^2+\beta^2}\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{-i\alpha x}}{x^2+\beta^2}\mathrm{d}x\right) \ .$$
Possiamo calcolare separatamente i due integrali usando il teorema dei residui. In particolare, per il lemma di Jordan, essendo α positivo, possiamo chiudere il primo integrale sul piano complesso superiore (curva percorsa in senso antiorario) e il secondo integrale sul piano complesso inferiore (curva percorsa in senso orario). L'integrando ha poli semplici in $z_1 = i\beta$ e $z_2 = -i\beta$. Essendo β positivo, il primo integrale circonda solo il primo polo e il secondo integrale circonda solo il secondo polo. Otteniamo
$$I = \frac{1}{4i}2\pi i\left(\mathrm{Res}_{z=z_1}\frac{ze^{i\alpha z}}{z^2+\beta^2} + \mathrm{Res}_{z=z_2}\frac{ze^{-i\alpha z}}{z^2+\beta^2}\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{i\beta e^{-\alpha\beta}}{2i\beta} + \frac{-i\beta e^{-\alpha\beta}}{-2i\beta}\right).$$
Quindi il risultato è
$$I = \frac{\pi}{2}e^{-\alpha\beta} \ .$$

2. L'equazione caratteristica della matrice A_1 è
$$(3-\lambda)(\lambda^2+8\lambda+16) = (3-\lambda)(\lambda+4)^2 = 0$$
mentre quello della matrice A_2 è
$$(5-\lambda)(\lambda^2+8\lambda+16) = (5-\lambda)(\lambda+4)^2 = 0 \ .$$
Quindi la prima matrice ha autoavalori 3 e -4 e la seconda 5 e -4, e per entrambe le matrici -4 ha molteplicità algebrica 2. Calcolando i risolventi si trova
$$R_z(A_1) = \begin{pmatrix} \frac{z+5}{(z+4)^2} & 0 & -\frac{1}{(z+4)^2} \\ 0 & \frac{1}{z-3} & 0 \\ \frac{1}{(z+4)^2} & 0 & \frac{z+3}{(z+4)^2} \end{pmatrix}$$

$$R_z(A_2) = \begin{pmatrix} \frac{z+5}{(z+4)^2} & 0 & \frac{1}{(z+4)^2} \\ 0 & \frac{1}{z-5} & 0 \\ -\frac{1}{(z+4)^2} & 0 & \frac{z+3}{(z+4)^2} \end{pmatrix} \; .$$

Gli operatori spettrali sono

$$P_3^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P_{-4}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J_{-4}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

per la matrice A_1 e

$$P_5^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P_{-4}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J_{-4}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

per la matrice A_2. È facile verificare che la somma dei proiettori è l'identità in entrambi i casi, $J^2 = 0$ in entrambi i casi e

$$A_1 = 3P_3^{(1)} - 4P_{-4}^{(1)} + J_{-4}^{(1)} \qquad A_2 = 5P_5^{(2)} - 4P_{-4}^{(2)} + J_{-4}^{(2)} \; .$$

Abbiamo quindi

$$f(A_1) = f(3)P_3^{(1)} + f(-4)P_{-4}^{(1)} + f'(-4)J_{-4}^{(1)}$$

$$f(A_2) = f(5)P_5^{(2)} + f(-4)P_{-4}^{(2)} + f'(-4)J_{-4}^{(2)} \; .$$

Dobbiamo calcolare $A_i^{\frac{1}{2}}$ con la determinazione e il taglio dati. In tutti i casi la funzione $z^{\frac{1}{2}}$ è negativa per z reali positivi. Questo significa che $z = |z|e^{2\pi i}$ sull'asse reale positivo. Se il taglio è sull'asse immaginario positivo devo ruotare in senso orario per andare sull'asse reale negativo. Questo significa che sull'asse reale negativo $z = |z|e^{i\pi}$ e quindi $z^{\frac{1}{2}} = i\sqrt{|z|}$. Viceversa se il taglio è sull'asse immaginario negativo devo ruotare in senso antiorario per andare sull'asse reale negativo. Questo significa che sull'asse reale negativo $z = |z|e^{3i\pi}$ e quindi $z^{\frac{1}{2}} = -i\sqrt{|z|}$.

In conclusione abbiamo

$$A_1^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}P_3^{(1)} + 2iP_{-4}^{(1)} - \frac{i}{4}J_{-4}^{(1)} \quad \text{(taglio sopra)}$$

$$A_1^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}P_3^{(1)} - 2iP_{-4}^{(1)} + \frac{i}{4}J_{-4}^{(1)} \quad \text{(taglio sotto)}$$

$$A_2^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{5}P_5^{(2)} + 2iP_{-4}^{(2)} - \frac{i}{4}J_{-4}^{(2)} \quad \text{(taglio sopra)}$$
$$A_2^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{5}P_5^{(2)} - 2iP_{-4}^{(2)} + \frac{i}{4}J_{-4}^{(2)} \quad \text{(taglio sotto)}$$

3. In tutti i casi il problema omogeneo ha soluzione $y(x) = \frac{a}{x}$. Imponendo la condizione iniziale, abbiamo in tutti i casi

$$y(x) = \frac{1}{x} \qquad 1 \leq x < 2 \ .$$

Nel primo caso il problema è omogeneo anche tra 2 e 3, ovvero $y(x) = \frac{b_1}{x}$, e abbiamo prima una discontinuità della funzione in $x = 2$,

$$2(y(2^+) - y(2^-)) = 1$$

da cui si trova $b_1 = 2$. Infine per $x > 3$ il problema non è omogeneo, una soluzione particolare del problema non omogeneo è $y_p(x) = 1$, e quindi scriviamo $y(x) = \frac{c_1}{x} + 1$ per $x > 3$. Imponendo continuità in 3 si trova $c_1 = -1$. Quindi

$$y(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & 2 < x < 3 \\ -\frac{1}{x} + 1 & x > 3 \ . \end{cases}$$

Nel secondo caso abbiamo il centro della θ e della δ sono invertiti. Abbiamo quindi un problema non omogeneo per $x > 2$. Scriviamo $y(x) = \frac{b_2}{x} + 1$ per $2 < x < 3$ e $y(x) = \frac{c_2}{x} + 1$ per $x > 3$. Imponendo continuità in 2 e

$$3(y(3^+) - y(3^-)) = 1$$

si trova $b_2 = -1$ e $c_2 = 0$, ovvero

$$y(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} + 1 & 2 < x < 3 \\ 1 & x > 3 \ . \end{cases}$$

Nel terzo e quarto caso la soluzione particolare del problema non omogeneo è $y_p(x) = \frac{x}{2}$. Nel terzo caso il problema diventa non omogeneo per $x > 2$, ovvero $y(x) = \frac{b_3}{x} + \frac{x}{2}$ per $2 < x < 3$ e $y(x) = \frac{c_3}{x} + \frac{x}{2}$ per $x > 3$. Imponendo la continuità in 2 e la discontinuità in 3

$$(y(3^+) - y(3^-)) = 1$$

si trova $b_3 = -1$ $c_3 = 2$ e quindi

$$y(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} + \frac{x}{2} & 2 < x < 3 \\ \frac{2}{x} + \frac{x}{2} & x > 3 \ . \end{cases}$$

Infine nel quarto caso abbiamo un problema omogeneo per $2 < x < 3$ e non omogeneo per $x > 3$, ovvero $y(x) = \frac{b_4}{x}$ per $x > 3$ e $y(x) = \frac{c_4}{x} + \frac{x}{2}$ per $x > 3$. Imponendo

$$(y(2^+) - y(2^-)) = 1$$

e la continuità in 3 si trova $b_4 = 3$ e $c_4 = -\frac{3}{2}$, ovvero

$$y(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} & 2 < x < 3 \\ -\frac{3}{2x} + \frac{x}{2} & x > 3 \ . \end{cases}$$