MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Soluzioni esame scritto - 16 novembre 2020 - Canale M-Z

1. Per risolvere l'integrale dobbiamo determinare i poli dell'integrando. Dobbiamo risolvere

$$4 \sin z + 3i = 0$$

ovvero

$$e^{iz} - e^{-iz} - \frac{3}{2} = 0$$

Moltiplicando per e^{iz} e definendo $w = e^{iz}$, otteniamo per w l'equazione di secondo grado

$$w^2 - \frac{3}{2}w - 1 = 0$$

i cui zeri sono $w_1 = 2$ e $w_2 = -\frac{1}{2}$. Dobbiamo quindi determinare gli z tali che

$$e^{iz} = 2$$

e quelli tali che

$$e^{iz} = -\frac{1}{2} \ .$$

Nel primo caso abbiamo

$$w_1 = 2 \quad \rightarrow \quad z_{2k} = -i \ln 2 + 2k\pi$$

mentre nel secondo abbiamo

$$w_2 = -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad z_{2k+1} = i \ln 2 + (2k+1)\pi \ .$$

Espandendo il denominatore in serie intorno a ciascun polo, si mostra che ciascun polo è un polo semplice. Inoltre, per ogni valore di z_0 dato, la curva circonda un solo polo. In particolare abbiamo

$$z_0 = \pi \quad \rightarrow z_1 = i \ln 2 + \pi$$

$$z_0 = -\pi \quad \rightarrow z_{-1} = i \ln 2 - \pi$$

$$z_0 = 2\pi \quad \rightarrow z_2 = -i \ln 2 + 2\pi$$

$$z_0 = -2\pi \quad \rightarrow z_{-2} = -i \ln 2 - 2\pi$$

Usando il teorema dei residui otteniamo

$$J = 2\pi i \mathrm{Res}_{z=z_i} \frac{1}{4\sin z + 3i} = \frac{2\pi i}{4\cos z_i}$$

Abbiamo

$$\cos z_1 = \cos z_{-1} = -\frac{5}{4} \qquad \cos z_2 = \cos z_{-2} = \frac{5}{4}$$

Quindi

$$J = -\frac{2\pi i}{5} \qquad z_0 = \pm\pi$$
$$J = \frac{2\pi i}{5} \qquad z_0 = \pm 2\pi \ .$$

2. La matrice è in forma di Jordan, quindi possiamo immediatamente leggere

$$P_{-a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_{-a} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P_b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per calcolare A^i dobbiamo stabilire la determinazione di z^i in $-a$ e in b e di iz^{i-1} in $-a$. Scrivendo $z = \rho e^{i\theta}$ abbiamo

$$z^i = e^{i\ln\rho - \theta}$$

Il fatto che $i^i = 1$ ci dice che per z reali positivi dobbiamo scegliere $\theta = 0$. Quindi

$$b^i = e^{i\ln b}$$

Se il taglio è lungo l'asse immaginario negativo, dobbiamo ruotare in senso antiorario per andare sull'asse reale negativo, quindi dobbiamo assegnare $\theta = \pi$. In questo caso si ottiene quindi

$$(-a)^i = e^{i\ln a} e^{-\pi}$$

$$i(-a)^{i-1} = -ie^{i\ln a} e^{\pi - \ln a} = -\frac{i}{a} e^{i\ln a} e^{-\pi}$$

Viceversa, se in taglio è lungo l'asse immaginario positivo, dobbiamo ruotare in senso orario e assegnare quindi $\theta = -\pi$, da cui

$$(-a)^i = e^{i \ln a} e^{\pi}$$

$$i(-a)^{i-1} = -\frac{i}{a} e^{i \ln a} e^{\pi}$$

In conclusione abbiamo

$$A^i = e^{i \ln a} e^{-\pi} P_{-a} - \frac{i}{a} e^{i \ln a} e^{-\pi} J_{-a} + e^{i \ln b} P_b$$

se il taglio è sotto e

$$A^i = e^{i \ln a} e^{\pi} P_{-a} - \frac{i}{a} e^{i \ln a} e^{\pi} J_{-a} + e^{i \ln b} P_b$$

se il taglio è sopra.

3. L'equazione, per $x \neq 2$, è un'equazione di Eulero. Scegliendo la soluzione $y(x) = x^\alpha$ si trova

$$\alpha^3 - 2\alpha^2 - \alpha + 2 = 0$$

le cui soluzioni sono

$$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 2 \quad \alpha_3 = -1$$

La soluzione generica è quindi

$$y(x) = ax + bx^2 + \frac{c}{x}$$

Imponiamo le condizioni in $x = 1$ per trovare la soluzione in $1 \leq x < 2$. Troviamo

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ a + 2b - c = 0 \\ 2b + 2c = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$a = 1 \quad b = -\frac{1}{3} \quad c = \frac{1}{3}$$

Da questi valori si trova

$$y(2^-) = \frac{5}{6} \quad y'(2^-) = -\frac{5}{12} \quad y''(2^-) = -\frac{7}{12}$$

Per $x > 2$ il problema è sempre omogeneo e quindi la soluzione è

$$y(x) = dx + ex^2 + \frac{f}{x}$$

La presenza della delta ci dice che la derivata seconda ha una discontinuità in 2, mentre la funzione e la derivata prima sono continue. Queste condizioni determinano d, e, f. Abbiamo

$$\begin{cases} 2d + 4e + \frac{f}{2} = \frac{5}{6} \\ d + 4e - \frac{f}{4} = -\frac{5}{12} \\ 2e + \frac{f}{4} = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12} \end{cases}$$

ovvero

$$d = e = 0 \quad f = \frac{5}{3}$$

In conclusione la soluzione è

$$y(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3x} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{5}{3x} & x > 2 \end{cases}$$