MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Soluzioni esame scritto - 17 gennaio 2022 - Canale Mf-Z

1. Scriviamo $z = e^{i\theta}$. L'integrale diventa

$$I = -i \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z \sinh\left(z + \frac{1}{2}\right)} \ ,$$

dove Γ è la circonferenza unitaria centrata nell'origine e percorsa in senso antiorario. Calcoliamo l'integrale usando il teorema dei residui. Dobbiamo trovare tutti i poli dentro la circonferenza. $z = 0$ è ovviamente un polo semplice. Gli altri poli si trovano risolvendo

$$\sinh\left(z + \tfrac{1}{2}\right) = 0 \ .$$

La funzione ha zeri semplici per

$$z_k = -\tfrac{1}{2} + k\pi i \qquad k \in \mathbb{Z} \ .$$

Solo $z_0 = -\frac{1}{2}$ si trova dentro al cerchio unitario. Troviamo quindi

$$I = 2\pi \mathrm{Res}_{z=0} \frac{1}{z \sinh\left(z + \frac{1}{2}\right)} + 2\pi \mathrm{Res}_{z=-\frac{1}{2}} \frac{1}{z \sinh\left(z + \frac{1}{2}\right)} \ .$$

Si ottiene

$$I = 2\pi \left(\frac{1}{\sinh \frac{1}{2}} - 2 \right) \ .$$

2. La matrice ha autovalori

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2} \qquad \lambda_2 = -\tfrac{1}{2} \ .$$

Il risolvente è

$$R_z(A) = \frac{1}{z^2 - \frac{1}{4}} \begin{pmatrix} z + \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & z - \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

e i proiettori sono

$$P_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad P_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \ .$$

Con la determinazione assegnata abbiamo

$$\arccos\tfrac{1}{2} = \tfrac{5\pi}{3} \qquad \arccos\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{4\pi}{3}$$

e quindi

$$\arccos A = \tfrac{5\pi}{3} P_{\frac{1}{2}} + \tfrac{4\pi}{3} P_{-\frac{1}{2}} \ .$$

3. Calcoliamo

$$c_n = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{ix}{2}} e^{-inx} \mathrm{d}x \ .$$

Si trova

$$c_n = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-1)^n}{n - \frac{1}{2}} \ ,$$

da cui

$$f(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n e^{inx}}{n - \frac{1}{2}} \ .$$

La serie converge puntualmente in $x = 0$. Troviamo

$$1 = -\frac{1}{\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{n - \frac{1}{2}} \ ,$$

da cui

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{n - \frac{1}{2}} = -\pi \ .$$

La serie converge anche in $x = \frac{\pi}{2}$, per cui

$$\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n e^{\frac{in\pi}{2}}}{n - \frac{1}{2}} \ .$$

Dividiamo la somma in n pari e dispari. Otteniamo

$$\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i) = -\frac{1}{\pi} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^{2m} e^{\frac{i2m\pi}{2}}}{2m - \frac{1}{2}} - \frac{1}{\pi} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^{2m+1} e^{\frac{i\pi(2m+1)}{2}}}{2m + \frac{1}{2}}$$

ovvero

$$\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i) = -\frac{1}{\pi} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^m}{2m - \frac{1}{2}} + \frac{i}{\pi} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^m}{2m + \frac{1}{2}} \ .$$

Mandando m in $-m$ è facile notare che la seconda somma è i volte la prima, e quindi entrambe forniscono

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^m}{2m-\frac{1}{2}} = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \ .$$