MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Soluzioni esame scritto del 18 febbraio 2020 - Canale N-Z

1. Possiamo calcolare l'integrale in due modi differenti. Il primo metodo è il seguente. Scriviamo

$$z = re^{\frac{i\pi}{4}}$$

e integriamo nella variabile r da 0 a $+\infty$. L'integrale diventa

$$I = e^{\frac{i\pi}{4}} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}r \, \frac{1}{1 - ir^2} = ie^{\frac{i\pi}{4}} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}r \, \frac{1}{r^2 + i} \quad .$$

Osserviamo che l'integrando è una funzione pari, per cui l'integrale è uguale a

$$I = \frac{ie^{\frac{i\pi}{4}}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}r \, \frac{1}{r^2 + i} \quad .$$

Ora estendiamo l'integrale nel piano complesso, e chiudiamo il percorso di integrazione all'infinito. Possiamo indifferentemente chiudere sopra o sotto, scegliamo di chiudere sopra. Indicando con ξ la variabile complessa di cui r è la parte reale, l'integrando ha poli semplici per $\xi^2 = -i$, ovvero

$$\xi_1 = e^{\frac{3i\pi}{4}} \qquad \xi_2 = e^{-\frac{i\pi}{4}} \quad .$$

Chiudendo sopra circondiamo solo il primo polo, e utilizzando il teorema dei residui troviamo

$$I = 2\pi i \, \frac{ie^{\frac{i\pi}{4}}}{2} \, \frac{1}{2\xi_1} = \frac{\pi i}{2} \quad .$$

Possiamo calcolare lo stesso integrale utilizzando la discontinuità della funzione logaritmo. Consideriamo la funzione

$$f(z) = \frac{\ln z}{1 - z^2}$$

e scegliamo per la funzione logaritmo il taglio lungo γ in modo che ad esempio $\ln z = \ln r + \frac{i\pi}{4}$ sopra il taglio e $\ln z = \ln r + \frac{9\pi i}{4}$ sotto il taglio, dove r è il modulo di z (qualunque altra determinazione con lo stesso taglio va bene). Integriamo $f(z)$ lungo la curva Γ che circonda γ e si chiude all'infinito in senso antiorario. Abbiamo

$$\int_\Gamma f(z)\ \mathrm{d}z = -2\pi i\ I \quad .$$

Calcoliamo l'integrale usando il teorema dei residui. Data la determinazione che abbiamo scelto, la funzione ha poli semplici in

$$z_1 = e^{\pi i} \qquad z_2 = e^{2\pi i}$$

Quindi

$$\int_\Gamma f(z)\ \mathrm{d}z = 2\pi i \left[\frac{\ln z_1}{2z_1} + \frac{\ln z_2}{2z_2}\right] = 2\pi i \left[\frac{\pi i}{2} - \frac{2\pi i}{2}\right] = \pi^2$$

da cui

$$I = \frac{\pi i}{2} \quad .$$

2. L'integrando ha poli per $e^z = -e$, ovvero

$$z = z_k = 1 + (2k+1)\pi i \qquad z \in \mathbb{Z} \quad .$$

Espandendo intorno a z_k, si capisce che i poli sono poli semplici. Infatti

$$\begin{aligned} e^z + e &= e + e^{z_k} + e^{z_k}(z - z_k) + \frac{1}{2}e^{z_k}(z - z_k)^2 + ... \\ &= -e(z - z_k)\left[1 + \frac{1}{2}(z - z_k) + ...\right] \end{aligned}$$

dove abbiamo usato $e^{z_k} = -e$. Di questi infiniti poli, quelli dentro la circonferenza sono

$$z_1 = 1 + 3\pi i \qquad z_0 = 1 + \pi i \qquad z_{-1} = 1 - \pi i \qquad z_{-2} = 1 - 3\pi i \quad .$$

Usando il teorema dei residui, troviamo quindi che l'integrale è uguale a

$$\begin{aligned} & 2\pi i \left[\frac{z_1^2}{e^{z_1}} + \frac{z_0^2}{e^{z_0}} + \frac{z_{-1}^2}{e^{z_{-1}}} + \frac{z_{-2}^2}{e^{z_{-2}}}\right] \\ &= -\frac{2\pi i}{e}\left[(1+3\pi i)^2 + (1+\pi i)^2 + (1-\pi i)^2 + (1-3\pi i)^2\right] \\ &= -\frac{8\pi i}{e}(1 - 5\pi^2) \quad . \end{aligned}$$

3. Vogliamo risolvere l'equazione differenziale

$$Tf(x) = \lambda f(x) \quad .$$

La soluzione è

$$f(x) = c \ \exp\left(\int_e^x \left(-\frac{1}{y\ \ln y} + \lambda\right) \mathrm{d}y\right)$$

dove c è il valore della funzione in e. Risolvendo l'integrale abbiamo

$$f(x) = c \ \exp\left(-\ln\left(\ln x\right) + \lambda(x-e)\right) = c \ \frac{1}{\ln x} \ e^{\lambda(x-e)} \quad .$$

Imponiamo $f(e^2) = f(e)$. Troviamo gli autovalori

$$\lambda = \lambda_k = \frac{1}{e^2 - e} \ (\ln 2 + 2k\pi i) \qquad k \in \mathbb{Z}$$

e le autofunzioni

$$f_k(x) = c \ \frac{1}{\ln x} \ e^{\lambda_k(x-e)} \quad .$$

4. Cerchiamo la soluzione dell'omogenea nella forma

$$y(x) = (x+1)^\alpha \ .$$

Troviamo per α l'equazione $\alpha^2 + 3\alpha + 2 = 0$, che ha soluzioni $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = -2$, quindi

$$y_1(x) = \frac{1}{x+1} \qquad y_2(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \ .$$

Per $0 < x \leq 1$, l'equazione è omogenea, e la soluzione generale è

$$y(x) = a_1 \ y_1(x) + a_2 \ y_2(x)$$

e dalle condizioni iniziali si trova

$$a_1 = 2 \qquad a_2 = -1$$

e quindi la soluzione è

$$y(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \qquad 0 < x \leq 1 \ .$$

Per $x = 1$ otteniamo

$$y(1) = \frac{3}{4} \qquad y'(1) = -\frac{1}{4} \; .$$

Per $x > 1$, risolviamo l'equazione per $x \neq 2$ come soluzione omogenea più soluzione particolare del problema non omogeneo. Una soluzione particolare è la soluzione costante $y_p(x) = \frac{1}{2}$. Scriviamo in particolare per $1 < x < 2$

$$y(x) = b_1 \; y_1(x) + b_2 \; y_2(x) + \frac{1}{2} \quad .$$

Dal momento che la derivata seconda della funzione ha una discontinuità tipo θ in $x = 1$, la funzione e la derivata prima sono continue. Otteniamo quindi le condizioni

$$\begin{cases} \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \\ -\frac{b_1}{4} - \frac{b_2}{4} = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

da cui

$$b_1 = 0 \qquad b_2 = 1 \quad ,$$

ovvero

$$y(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2} \qquad 1 < x < 2 \quad .$$

La funzione per $x > 2$ ha sempre la forma

$$y(x) = c_1 \; y_1(x) + c_2 \; y_2(x) + \frac{1}{2}$$

e la presenza della delta di Dirac implica che in $x = 2$ dobbiamo imporre continuità della funzione e discontinuità della derivata prima. In particolare la discontinuità è

$$y'(2^+) - y'(2^-) = \frac{1}{9} \; .$$

Otteniamo quindi le condizioni

$$\begin{cases} \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{9} = \frac{1}{9} \\ -\frac{c_1}{9} - \frac{2c_2}{27} + \frac{2}{27} = \frac{1}{9} \end{cases}$$

ovvero

$$c_1 = 1 \qquad c_2 = -2$$

da cui si ottiene la soluzione

$$y(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{2} \qquad x > 2 \quad .$$