MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Soluzioni esame scritto del 20 gennaio 2020 - Canale N-Z

1. Consideriamo la funzione polidroma $f(z) = \frac{z \log z}{1+z^4}$. Scegliamo il taglio lungo l'asse reale positivo e scegliamo sopra il taglio la determinazione

$$f(x^+) = \frac{x \log x}{1 + x^4}.$$

Di conseguenza sotto il taglio si ha

$$f(x^-) = \frac{x(\log x + 2\pi i)}{1 + x^4}.$$

Consideriamo ora l'integrale

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z$$

dove Γ è la curva che circonda il taglio e si chiude all'infinito percorsa in senso antiororario. Applicando il lemma di Jordan questo integrale vale

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_0^\infty \frac{x \log x}{1 + x^4}\mathrm{d}x - \int_0^\infty \frac{x(\log x + 2\pi i)}{1 + x^4}\mathrm{d}x = -2\pi i I,$$

dove I è l'integrale che dobbiamo calcolare. Di conseguenza esso è l'opposto della somma dei residui nei punti singolari di $f(z)$ che sono $z_k = \exp(i\pi/4 + ik\pi/2)$, $k = 0, 1, 2, 3$. Si ha dunque

$$I = -\sum_{k=0}^{3} \frac{\log z_k}{4z_k^2} = -\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{5}{4} - \frac{7}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

L'integrale poteva essere risolto anche considerando

$$\int_{\tilde{\Gamma}} \frac{z}{1 + z^4}\mathrm{d}z$$

dove $\tilde{\Gamma}$ è il cammino che va da 0 a ∞ sull'asse reale, chiude all'infinito sul primo quadrante e va da $i\infty$ a 0 sull'asse immaginario. Utilizzando tale cammino si ha

$$\int_{\tilde{\Gamma}} \frac{z}{1 + z^4}\mathrm{d}z = I + i\int_\infty^0 \frac{iy}{1 + y^4}\mathrm{d}y = 2I \quad .$$

L'unico residuo all'interno del cammino di integrazione è $z = \exp(i\pi/4)$. L'integrale da calcolare vale quindi

$$I = \frac{1}{2} 2\pi i \mathrm{Res}_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}} \frac{z}{1+z^4} = \frac{\pi}{4} \ .$$

2. Scriviamo

$$A = -\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{\alpha^2}{4} - \beta\right)^{\frac{1}{2}}$$

dove $\left(\frac{\alpha^2}{4} - \beta\right)^{\frac{1}{2}}$ indica una matrice il cui quadrato è $\frac{\alpha^2}{4} - \beta$. Abbiamo

$$A^2 = \frac{\alpha^2}{2} - \beta - \frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha^2}{4} - \beta\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\alpha^2}{4} - \beta\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\alpha}{2} \quad .$$

Se α è proporzionale all'identità commuta con $\left(\frac{\alpha^2}{4} - \beta\right)^{\frac{1}{2}}$ e quindi

$$A^2 = \frac{\alpha^2}{2} - \beta - \alpha\left(\frac{\alpha^2}{4} - \beta\right)^{\frac{1}{2}}$$

da cui segue $A^2 + \alpha A + \beta = 0$.

Abbiamo quindi nel nostro caso

$$A = -2\mathbb{I} + (4\mathbb{I} + \sigma_1)^{\frac{1}{2}}$$

e per trovare tutte le matrici A dobbiamo trovare tutte le matrici $C^{\frac{1}{2}}$ il cui quadrato è la matrice

$$C = 4\mathbb{I} + \sigma_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad .$$

La matrice ha autovalori 3 e 5, e il risolvente è

$$R_z(C) = \frac{1}{(z-5)(z-3)} \begin{pmatrix} z-4 & 1 \\ 1 & z-4 \end{pmatrix}$$

da cui si trovano i proiettori

$$P_5 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Quindi

$$C = 5P_5 + 3P_3$$

e

$$C^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{5}P_5 \pm \sqrt{3}P_3$$

dove tutte e quattro le combinazioni di segni sono possibili. In conclusione si trovano quattro soluzioni:

$$A_1 = -2\mathbb{I} + \sqrt{5}P_5 + \sqrt{3}P_3$$

$$A_2 = -2\mathbb{I} + \sqrt{5}P_5 - \sqrt{3}P_3$$

$$A_3 = -2\mathbb{I} - \sqrt{5}P_5 + \sqrt{3}P_3$$

$$A_4 = -2\mathbb{I} - \sqrt{5}P_5 - \sqrt{3}P_3$$

3. Possiamo prima calcolare i coefficienti di Fourier nella base complessa. Abbiamo

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x \; e^{-inx} x^2$$

da cui si trova

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\pi^3}{3} \qquad c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-1)^n \frac{4\pi}{n^2} \quad n \neq 0 \quad .$$

Quindi nella base trigonometrica

$$a_0 = \frac{2\pi^2}{3} \qquad a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2} \quad b_n = 0 \quad .$$

In generale, se si calcola la norma in $L^2[-\pi, \pi]$ di una funzione $f(x)$ si ha

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \quad .$$

Riscrivendo i coefficienti in termini di a_n e b_n si ottiene (identità di Parseval)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 \quad .$$

Applicando al nostro caso si trova

$$\frac{1}{\pi}\frac{2\pi^5}{5} = \frac{2\pi^4}{5} = \frac{1}{2}\frac{4\pi^4}{9} + 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

da cui risulta

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad .$$

Vogliamo usare questo risultato per calcolare

$$I = \int_0^{\infty}\frac{x^3}{e^x - 1}\mathrm{d}x \quad .$$

Scriviamo

$$I = \int_0^{\infty}\frac{e^{-x}x^3\mathrm{d}x}{1-e^{-x}} = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-x}e^{-nx}x^3\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-nx}x^3\mathrm{d}x \quad .$$

Effettuando il cambio di variabile $x = ny$ si trova

$$I = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\int_0^{\infty} e^{-y}y^3\mathrm{d}y = \Gamma(4)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \quad .$$

Sostituendo $\Gamma(4) = 6$ e $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ si trova

$$I = \frac{\pi^4}{15} \quad .$$

4. Risolviamo prima il problema omogeneo. L'equazione è un'equazione di Eulero e cerchiamo la soluzione nella forma $y = x^\alpha$. Si trovano le soluzioni

$$y_1(x) = x^2 \qquad y_2(x) = x \quad .$$

La funzione ha discontinuità sulla derivata prima nei punti $x = 1$ e $x = 2$. Quindi scriviamo

$$y(x) = \begin{cases} a_1x^2 + b_1x & x < 1 \\ a_2x^2 + b_2x & 1 < x < 2 \\ a_3x^2 + b_3x & x > 2 \end{cases} \quad .$$

La condizione in $x = \frac{1}{2}$ ci dice

$$a_1 = b_1 = 0 \quad .$$

La condizione $y(1^+) = y(1^-)$ e $y'(1^+) - y'(1^-) = 1$ ci dice che

$$a_2 = 1 \quad b_2 - 1 \quad .$$

Infine la condizione $y(2^+) = y(2^-)$ e $y'(2^+) - y'(2^-) = -\frac{1}{4}$ ci dice che

$$a_3 = \frac{7}{8} \qquad b_3 = -\frac{3}{4} \quad .$$

In conclusione la soluzione è

$$y(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ x^2 - x & 1 < x < 2 \\ \frac{7}{8}x^2 - \frac{3}{4}x & x > 2 \end{cases} \qquad .$$