MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Soluzioni esame scritto - 21 giugno 2022 - Canale O-Z

1. La funzione ha poli per $\cosh z = 0$ e $\cosh z = 1$. Usando l'identità data si vede che mettendo a zero la parte immaginaria di $\cosh z$ si deve avere $x = 0$ oppure $y = m\pi$, ma in realtà solo per $x = 0$ si ha che la parte reale può essere 0 oppure 1. Quindi tutti i poli della funzione sono sull'asse immaginario. I valori per cui $\cosh z = 0$ sono

$$z = z_k = i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \ .$$

È facile convincersi che questi poli sono semplici. Possiamo in particolare calcolare il residuo della funzione:

$$\mathrm{Res}_{z=z_k} f(z) = \frac{z_k}{\sinh z_k} = (-1)^k \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \ ,$$

dove abbiamo usato $\sinh z_k = (-1)^k i$. I valori per cui $\cosh z = 1$ sono

$$z = z_n = 2\pi i n \ .$$

Espandendo il denominatore intorno a z_n abbiamo

$$\cosh z - \cosh^2 z \simeq 1 + \frac{1}{2}(z-z_n)^2 + ... - (1 + \frac{1}{2}(z-z_n)^2 + ...)^2 \simeq -\frac{1}{2}(z-z_n)^2 + ... \ ,$$

da cui si vede che abbiamo un polo doppio per $n \neq 0$, mentre a causa dello z a numeratore abbiamo un polo semplice in $z = 0$. Dall'espansione in serie si deduce che

$$\mathrm{Res}_{z=0} f(z) = -2 \ .$$

Possiamo quindi calcolare gli integrali. Il primo integrale circonda il polo $z = 0$, e i poli z_k per $k = 0$ e $k = -1$. Quindi

$$I_1 = 2\pi i\left(-2 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 2\pi i(-2 + \pi) \ .$$

Il secondo integrale circonda i poli z_k per $k = 0$ e $k = 1$, quindi

$$I_2 = 2\pi i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2}\right) = -2\pi^2 i \ .$$

2. Abbiamo

$$y_2(x) = x^2 \cos x \int^x \frac{\exp \int^t \frac{4}{x'} \mathrm{d}x'}{t^4 \cos^2 t} \mathrm{d}t$$

da cui risulta, a meno di costanti

$$y_2(x) = x^2 \sin x \ .$$

La più generale soluzione dell'omogenea è

$$y(x) = a x^2 \cos x + b x^2 \sin x \ ,$$

e imponendo le condizioni al bordo otteniamo che nel caso 1 $x^2 \sin x$ (ovvero $a = 0$) è soluzione, mentre nel caso 2 non ci sono soluzioni. Quindi solo nel caso 1 l'operatore ha un autovalore nullo.

Possiamo quindi scrivere la funzione di Green del problema al bordo solo nel caso 2, perché nel caso 1 l'operatore A non è invertibile. Possiamo facilmente calcolare il wronskiano. Otteniamo

$$W(x) = x^4 \ .$$

Quindi

$$G(x, x') = \left(A_-(x') - \frac{\theta(x - x') \sin x'}{(x')^2} \right) x^2 \cos x + \left(B_-(x') + \frac{\theta(x - x') \cos x'}{(x')^2} \right) x^2 \sin x \ .$$

Imponiamo

$$G\left(\frac{\pi}{2}, x'\right) = 0 \ \rightarrow \ B_-(x') = 0$$

$$G(\pi, x') = 0 \ \rightarrow \ A_-(x') = \frac{\sin x'}{(x')^2} \ .$$

Sostituendo troviamo

$$G(x, x') = \theta(x' - x) \frac{\sin x'}{(x')^2} x^2 \cos x + \theta(x - x') \frac{\cos x'}{(x')^2} x^2 \sin x \ .$$

Scriviamo infine la soluzione

$$y(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} G(x, x') (x')^3 \mathrm{d}x'$$

ovvero

$$y(x) = x^2 \cos x \int_x^{\pi} x' \sin x' + x^2 \sin x \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} x' \cos x'.$$

Gli integrali si calcolano facilmente per parti. Il risultato è

$$y(x) = x^2 \cos x \, (\pi + x \cos x - \sin x) + x^2 \sin x \, (x \sin x - \frac{\pi}{2} + \cos x)$$

ovvero

$$y(x) = \pi x^2 \cos x - \frac{\pi}{2} x^2 \sin x + x^3 \ .$$

È facile mostrare che le condizioni al bordo sono verificate e che x^3 è una soluzione particolare.