MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Soluzioni esame scritto - 25 gennaio 2021 - Canale M-Z

1. Entrambi gli integrandi hanno poli semplici per $z_1 = -2$ e $z_2 = 2$. Per calcolare I_1 possiamo chiudere il cammino di integrazione sia a destra che a sinistra. Se chiudiamo a sinistra la curva è percorsa in senso antiorario e aggiriamo solo il polo z_1. Quindi

$$I_1 = 2\pi i \mathrm{Res}_{z=z_1} \frac{1}{z^2-2} = -\frac{\pi i}{2} \ .$$

Per il secondo integrale assumiamo innanzi tutto che la determinazione per il logaritmo è tale che $\log z = \log \rho + \frac{i\pi}{2}$ lungo il cammino di integrazione (una qualunque altra scelta è comunque valida se specificata). Possiamo calcolare l'integrale usando la discontinuità di $(\log z)^2$. Consideriamo la curva Γ in figura. Abbiamo

$$\int_\Gamma \frac{(\log z)^2}{z^2-4} \mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} \frac{(\log z)^2}{z^2-4} \mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} \frac{(\log z)^2}{z^2-4} \mathrm{d}z \ .$$

Scegliamo la determinazione lungo γ_1 essere la determinazione del log data. Gli integrali lungo γ_1 e γ_2 sono legati dalla relazione

$$\int_{\gamma_2} \frac{(\log z)^2}{z^2-4} \mathrm{d}z = -\int_{\gamma_1} \frac{(\log z + 2\pi i)^2}{z^2-4} \mathrm{d}z \ .$$

Quindi

$$\int_\Gamma \frac{(\log z)^2}{z^2-4} \mathrm{d}z = \int_0^{i\infty} \frac{(\log z)^2}{z^2-4} \mathrm{d}z - \int_0^{i\infty} \frac{(\log z + 2\pi i)^2}{z^2-4} \mathrm{d}z$$

ovvero

$$\int_\Gamma \frac{(\log z)^2}{z^2-4} \mathrm{d}z = -4\pi i I_2 + 4\pi^2 \int_0^{i\infty} \frac{1}{z^2-4} \mathrm{d}z = -4\pi i I_2 + 2\pi^2 I_1$$

Calcoliamo l'integrale lungo Γ usando il teorema dei residui. Di nuovo, abbiamo poli semplici in $z_1 = -2$ e $z_2 = 2$. Siccome la fase è $\frac{\pi}{2}$ a sinistra del taglio, girando in senso antiorario abbiamo

$$\log z_1 = \log 2 + \pi i \qquad \log z_2 = \log 2 + 2\pi i$$

e quindi otteniamo

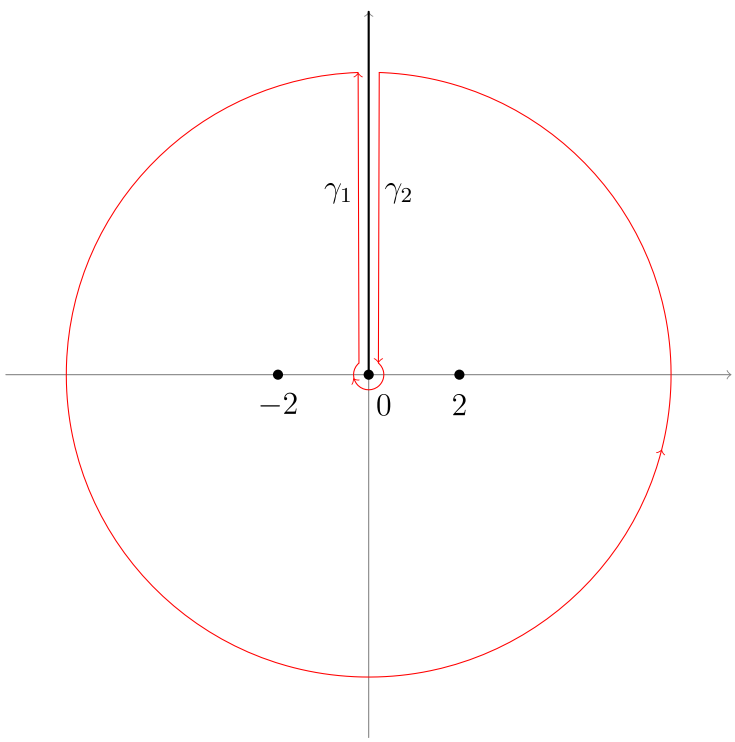
$$\int_\Gamma \frac{(\log z)^2}{z^2-4}\mathrm{d}z = 2\pi i\left[\frac{(\log 2+i\pi)^2}{-4}+\frac{(\log 2+2\pi i)^2}{4}\right] = \frac{\pi i}{2}[2\pi i\log 2 - 3\pi^2]\,.$$

Quindi si ottiene

$$I_2 = -\frac{1}{8}[2\pi i\log 2 - 3\pi^2] - \frac{\pi i}{2}I_1$$

e sostituendo il valore di I_1 si trova

$$I_2 = -\frac{\pi i\log 2}{4}+\frac{\pi^2}{8}\ .$$



2. Si può immediatamente dedurre che la matrice ha autovalori 1 e -1. Calcoliamo l'operatore risolvente. Otteniamo

$$R_z(A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{z-1} & \frac{1}{(z-1)^2} & \frac{1}{(z-1)^2(z+1)} \\ 0 & \frac{1}{z-1} & \frac{1}{(z-1)(z+1)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{z+1} \end{pmatrix}$$

Dal risolvente calcoliamo

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e possiamo verificare che

$$P_1 + P_{-1} = \mathbb{I} \qquad P_1 + J_1 - P_{-1} = A$$

Per ogni funzione analitica $f(z)$ possiamo scrivere

$$f(A) = f(1)P_1 + f'(1)J_1 + f(-1)P_{-1} \quad .$$

Consideriamo quindi la funzione

$$f_x(z) = x^z \ .$$

Abbiamo, derivando rispetto a z,

$$f_x'(z) = x^z \log x$$

e quindi

$$x^A = xP_1 + x\log x J_1 + x^{-1}P_{-1} = \begin{pmatrix} x & x\log x & -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x^{-1} + \frac{1}{2}x\log x \\ 0 & x & \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^{-1} \\ 0 & 0 & x^{-1} \end{pmatrix} .$$

Per $x = 1$ abbiamo che il log si annulla e quindi

$$1^A = P_1 + P_{-1} = \mathbb{I} \ .$$

La soluzione del problema di Cauchy dato è

$$\mathbf{y}(x) = x^A \mathbf{y}_0$$

come si può verificare effettuando la sostituzione esplicita:

$$\begin{cases} y_1(x) = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}x\log x + \frac{1}{4}x^{-1} \\ y_2(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^{-1} \\ y_3(x) = x^{-1} \ . \end{cases}$$