MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Soluzioni esame scritto - 22 giugno 2021 - Canale Mf-Z

1. Per trovare i poli di $f(z)$, osserviamo che

$$\sinh z = i \sin(-iz) \ .$$

Dobbiamo quindi risolvere

$$\sin(-iz) = \alpha \quad .$$

Scrivendo $\alpha = \sin\theta$, le soluzioni sono

$$\begin{cases} -iz = \theta + 2k\pi \\ -iz = \pi - \theta + 2k\pi \end{cases}$$

dove ai valori di z dati corrispondono i valori di θ seguenti:

$$\begin{cases} z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \to \theta_1 = \frac{\pi}{4} \\ z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \to \theta_2 = \frac{\pi}{3} \\ z_3 = \frac{1}{2} \quad \to \theta_3 = \frac{\pi}{6} \ . \end{cases}$$

Quindi, nell'intervallo $[0, 2\pi i]$ sull'asse immaginario, i poli sono

$$z_a = i\theta \qquad z_b = i(\pi - \theta) \ .$$

Consideriamo l'integrale di $f(z)$ nel rettangolo Γ che va da $-R$ ad R sull'asse reale, da R a $R+2\pi i$, da $R+2\pi i$ a $-R+2\pi i$ e da $-R+2\pi i$ a $-R$. Gli integrali paralleli all'asse immaginario vanno a zero nel limite $R \to \infty$, e quindi in questo limite

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \frac{x}{\sinh x - i\alpha} - \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \frac{x + 2\pi i}{\sinh x - i\alpha}$$

ovvero

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = -2\pi i I_0$$

dove I_0 è l'integrale che dobbiamo calcolare. Possiamo calcolare l'integrale lungo Γ usando il teorema dei residui. Si ottiene

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \left[\mathrm{Res}_{z=z_a} f(z) + \mathrm{Res}_{z=z_b} f(z)\right]$$

$$= 2\pi i \left[\frac{i\theta}{\cosh{(i\theta)}} + \frac{i(\pi-\theta)}{\cosh i(\pi-\theta)} \right] = 2\pi i \left[\frac{i(2\theta-\pi)}{\cos\theta} \right] \ ,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato $\cosh{(i\theta)} = \cos\theta$ e $\cos{(\pi-\theta)} = -\cos\theta$.

Quindi

$$I_0 = \frac{i(\pi - 2\theta)}{\cos\theta}$$

e sostituendo i valori di θ si trova

$$I_0^{(1)} = \frac{i\pi}{\sqrt{2}} \qquad I_0^{(2)} = \frac{2\pi i}{3} \qquad I_0^{(3)} = \frac{4\pi i}{3\sqrt{3}} \ .$$

Per calcolare I_1 consideriamo l'integrale lungo lo stesso cammino Γ della funzione

$$g(z) = \frac{z^2}{\sinh z - i\alpha} \ .$$

Abbiamo, nel limite $R \to \infty$,

$$\int_\Gamma g(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \frac{x^2}{\sinh x - i\alpha} - \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \frac{(x+2\pi i)^2}{\sinh x - i\alpha}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \frac{-4\pi i x + 4\pi^2}{\sinh x - i\alpha} = -4\pi i I_1 + 4\pi^2 I_0 \ .$$

Calcoliamo l'integrale lungo Γ usando il teorema dei residui. Troviamo

$$-4\pi i I_1 + 4\pi^2 I_0 = 2\pi i \left[\frac{(i\theta)^2}{\cos\theta} - \frac{(i\pi - i\theta)^2}{\cos\theta} \right] = 2\pi^2 i \frac{\pi - 2\theta}{\cos\theta}$$

e sostituendo I_0 si trova

$$I_1 = \frac{\pi(\pi - 2\theta)}{2\cos\theta} \ .$$

Sostituendo i valori dati si trova

$$I_1^{(1)} = \frac{\pi^2}{2\sqrt{2}} \qquad I_1^{(2)} = \frac{\pi^2}{3} \qquad I_1^{(3)} = \frac{2\pi^2}{3\sqrt{3}} \ .$$

2. La seconda soluzione del problema omogeneo è

$$y_2(x) = Cy_1(x)\int^x \frac{\exp\int^t \frac{2}{x'}\mathrm{d}x'}{y_1(t)^2}\mathrm{d}t = Cx\cos x\int^x \frac{t^2}{t^2\cos^2 t}\mathrm{d}t$$

e a meno di costanti si trova

$$y_2(x) = x\sin x\ .$$

La soluzione più generale del problema omogeneo è quindi

$$y(x) = ax\cos x + bx\sin x\ .$$

L'unica soluzione che soddisfa le condizioni al bordo del dominio $\mathcal{D}_1(T)$ è la soluzione identicamente nulla, per cui l'operatore T non ha autovalore nullo nel dominio $\mathcal{D}_1(T)$. Le condizioni al bordo del dominio $\mathcal{D}_2(T)$ sono soddisfatte imponendo $b=0$, da cui segue che la funzione $x\cos x$ è autofunzione di T con autovalore nullo.

Per risolvere i problemi al bordo con la δ come sorgente, scriviamo

$$y(x) = \begin{cases} a_1 x\cos x + b_1 x\sin x & x<\alpha\pi \\ a_2 x\cos x + b_2 x\sin x & x>\alpha\pi\ , \end{cases}$$

dove $\alpha = 1$ nei primi due casi e $\alpha = \frac{3}{2}$ nel terzo caso. Calcoliamo la derivata:

$$y(x)' = \begin{cases} (a_1+b_1x)\cos x + (b_1-a_1x)\sin x & x<\alpha\pi \\ (a_2+b_2x)\cos x + (b_2-a_2x)\sin x & x>\alpha\pi\ , \end{cases}$$

e imponiamo che la funzione sia continua in $\alpha\pi$ e la derivata abbia la discontinuità

$$y'(\alpha\pi^+) - y'(\alpha\pi^-) = \alpha\pi \quad .$$

Per $\alpha=1$ (primi due casi) troviamo che la continuità impone $a_1=a_2$, e la discontinuità della derivata impone $b_1-b_2=1$. Quindi la generica soluzione (prima di imporre le condizioni al bordo) è

$$y(x) = \begin{cases} a_1 x\cos x + b_1 x\sin x & x<\pi \\ a_1 x\cos x + (b_1-1)x\sin x & x>\pi\ . \end{cases}$$

Nel primo caso le condizioni al bordo ci danno

$$b_1 = 0 \qquad a_2 = 0$$

che insieme alle condizioni che troviamo per la generica soluzione ci danno la soluzione

$$y(x) = \begin{cases} 0 & x < \pi \\ -x \sin x & x > \alpha\pi \ . \end{cases}$$

Nel secondo caso le condizioni al bordo ci danno $b_1 = b_2 = 0$, che non è compatibile con la soluzione che troviamo, quindi il problema non ammette soluzione.

Per $\alpha = \frac{3}{2}$, la condizione di continuità della funzione è $b_1 = b_2$, mentre la condizione di discontinuità della derivata è $a_2 = 1 + a_1$. Quindi la generica soluzione (prima di imporre le condizioni al bordo) è

$$y(x) = \begin{cases} a_1 x \cos x + b_1 x \sin x & x < \frac{3\pi}{2} \\ (1 + a_1) x \cos x + b_1 x \sin x & x > \frac{3\pi}{2} \ . \end{cases}$$

Le condizioni al bordo ci danno come prima $b_1 = b_2 = 0$, e quindi otteniamo in questo caso infinite soluzioni

$$y(x) = \begin{cases} a\, x \cos x & x < \frac{3\pi}{2} \\ (1 + a)\, x \cos x & x > \frac{3\pi}{2} \ . \end{cases}$$