MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Soluzioni esame scritto - 25 gennaio 2021 - Canale M-Z

1. Abbiamo

$$f(z) = (z+1)^{-\frac{1}{2}}(z-1)^{-\frac{1}{2}} \ .$$

La funzione $f(z)$ è reale positiva per $z = x$ con $x > 1$ sopra il taglio. Per z intorno a 1 possiamo scrivere $z = 1 + \epsilon e^{i\theta}$ e quindi

$$f(z) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} e^{-\frac{i\theta}{2}} \ .$$

Sopra il taglio la funzione è positiva, quindi scegliamo $\theta_i = 0$, da cui ruotando di π in senso antiorario otteniamo che la funzione è immaginaria negativa per z reale minore di 1 ed è reale negativa sotto il taglio. Il fatto che la funzione sia immaginaria negativa per $x < 1$ implica che

$$f(0) = -i \ .$$

Intorno a -1 scriviamo $z = -1 + \epsilon e^{i\theta}$, da cui

$$f(z) \simeq -\frac{i}{\sqrt{2\epsilon}} e^{-\frac{i\theta}{2}} \ ,$$

e di nuovo prendiamo $\theta_i = 0$ a destra di -1 in modo che la funzione sia immaginaria negativa. Per andare sopra il taglio che parte da -1 dobbiamo ruotare di π in senso antiorario, mentre per andare sotto il taglio dobbiamo ruotare di π in senso orario. Si ottiene quindi che la funzione è reale negativa sopra il taglio a sinistra, e reale positiva sotto.

Consideriamo ora l'integrale

$$\int_\Gamma \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z}$$

dove Γ è la curva in figura. Gli unici contributi diversi da zero sono gli integrali lungo $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ e γ_4. Siccome $f(z)$ lungo γ_3 è negativa, l'integrale lungo γ_3 è uguale all'integrale lungo γ_1. Anche l'integrale lungo γ_2 è uguale all'integrale lungo γ_1 perché la funzione cambia segno ma la curva è percorsa in verso opposto, e lo stesso vale per l'integrale lungo γ_4. Di conseguenza l'integrale completo è 4 volte l'integrale I

che dobbiamo calcolare. Del resto l'integrale lungo Γ si calcola usando il teorema dei residui. La curva circonda il polo semplice $z_0 = 0$, e il residuo è

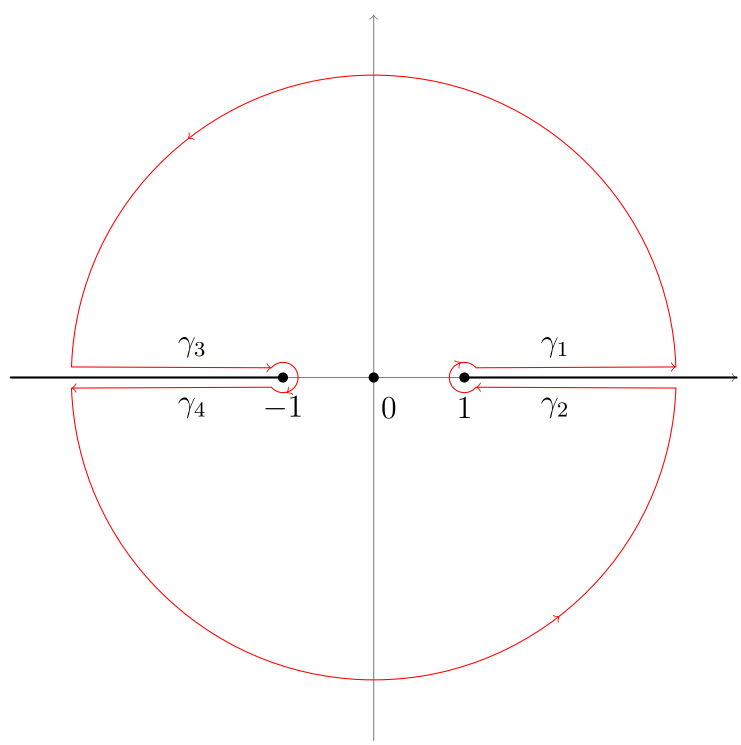
$$\mathrm{Res}_{z=0}\frac{f(z)}{z} = f(0) = -i$$

da cui

$$4I = 2\pi i(-i)$$

ovvero

$$I = \frac{\pi}{2} \ .$$



2. La formula che fornisce la seconda soluzione usando il fatto che il wronskiano soddisfa un'equazione del primo ordine è

$$f_2(x) = C f_1(x) \int^x \exp\left(-\int^y \frac{a_1(t)}{a_2(t)}\mathrm{d}t\right) \frac{\mathrm{d}y}{f_1(y)^2}$$

dove ci interessa solo l'estremo superiore dell'integrale perché termini costanti sono proporzionali a $f_1(x)$ che già sappiamo che è soluzione.

Sostituendo otteniamo

$$f_2(x) = C\frac{\sin x}{x}\int^x \exp\left(-\int^y \frac{2}{t}\mathrm{d}t\right)\frac{y^2\mathrm{d}y}{\sin^2 y}\ .$$

Abbiamo

$$\exp\left(-\int^y \frac{2}{t}\mathrm{d}t\right) = \exp\left(-2\ln y\right) = \frac{1}{y^2}$$

da cui

$$f_2(x) = C\frac{\sin x}{x}\int^x \frac{\mathrm{d}y}{\sin^2 y} = -C\frac{\sin x}{x}\cot x = -C\frac{\cos x}{x}\ .$$

Scegliendo $C = -1$ abbiamo quindi (come potevamo aspettarci)

$$f_2(x) = \frac{\cos x}{x}\ .$$

Trovare autovalori nulli di T corrisponde a risolvere l'equazione $Tf = 0$, che è l'equazione omogenea che abbiamo risolto. La soluzione generale è

$$f(x) = af_1(x) + bf_2(x)\ .$$

Abbiamo

$$f\left(\pi/2\right) = \frac{2a}{\pi} \qquad f(\pi) = -\frac{b}{\pi} \qquad f(2\pi) = \frac{b}{2\pi}\ .$$

Quindi nel dominio $\mathcal{D}_1(T)$ dobbiamo imporre $a = b = 0$, per cui non abbiamo soluzione, mentre nel dominio $\mathcal{D}_2(T)$ dobbiamo imporre $b = 0$, e quindi $f_1(x)$ è autofunzione.

Consideriamo ora il problema non omogeneo. La soluzione particolare è data dalla formula

$$f_p(x) = -f_1(x)\int^x \frac{f_2(y)\ g(y)\ \mathrm{d}y}{a_2(y)\ W(y)} + f_2(x)\int^x \frac{f_1(y)\ g(y)\ \mathrm{d}y}{a_2(y)\ W(y)}$$

dove W è il wronskiano e $g(x)$ è il termine forzante dell'equazione. Nel nostro caso abbiamo $g(x) = x$, $a_2(x) = x^2$. Possiamo calcolare il wronskiano da $f_1(x)$ e $f_2(x)$. Troviamo

$$W(x) = -\frac{1}{x^2}$$

da cui

$$f_p(x) = \frac{\sin x}{x} \int^x \cos y \, \mathrm{d}y - \frac{\cos x}{x} \int^x \sin y \, \mathrm{d}y = \frac{\sin^2 x}{x} + \frac{\cos^2 x}{x}$$

ovvero

$$f_p(x) = \frac{1}{x} \ .$$

La soluzione più generale del problema non omogeneo è

$$f(x) = \frac{1}{x} + a\frac{\sin x}{x} + b\frac{\cos x}{x} \ .$$

Imponendo le condizioni iniziali troviamo

$$f(\pi) = \frac{1}{\pi} - \frac{b}{\pi} = 1 \qquad f'(\pi) = -\frac{1}{\pi^2} - \frac{a}{\pi} + \frac{b}{\pi^2} = 1$$

ovvero

$$a = -1 - \pi \qquad b = 1 - \pi$$

e quindi la soluzione è

$$f(x) = \frac{1}{x} + (-1 - \pi)\frac{\sin x}{x} + (1 - \pi)\frac{\cos x}{x} \ .$$