MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Soluzioni esame scritto - 2 maggio 2022 - Canale Mf-Z

1. Cerchiamo gli zeri della funzione $\sin(e^z)$, che si trovano risolvendo

$$e^z = k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \ .$$

Abbiamo soluzione solo per $k \neq 0$. Per $k > 0$ abbiamo

$$z = z_{k,2n} = \ln(k\pi) + 2n\pi i \qquad n \in \mathbb{Z}$$

mentre per $k < 0$ abbiamo

$$z = z_{-k,2n+1} = \ln(-k\pi) + (2n+1)\pi i \qquad n \in \mathbb{Z} \ .$$

Possiamo mettere insieme i due insiemi di punti scrivendo

$$z = z_{k,n} = \ln(k\pi) + n\pi i \qquad n \in \mathbb{Z} \quad , \qquad k > 0 \ .$$

Questi punti si trovano tutti sulla parte destra del piano complesso e sono tutti poli semplici per $f(z)$.

La curva centrata nell'origine circonda solo i punti

$$z_{1,0} = \ln(\pi) \qquad z_{2,0} = \ln(2\pi) \ .$$

Calcoliamo l'integrale usando il teorema dei residui. Chiamando I_1 l'integrale, abbiamo

$$\begin{aligned} I_1 &= 2\pi i \left[\mathrm{Res}_{z=z_{1,0}} f(z) + \mathrm{Res}_{z=z_{2,0}} f(z)\right] \\ &= 2\pi i \left[\frac{1}{e^{z_{1,0}}\cos(e^{z_{1,0}})} + \frac{1}{e^{z_{2,0}}\cos(e^{z_{2,0}})}\right] \ . \end{aligned}$$

Risulta $e^{z_{1,0}} = \pi$ e $e^{z_{2,0}} = 2\pi$, da cui

$$I_1 = 2\pi i \left[-\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi}\right] = -i \ .$$

La circonferenza centrata in $z_0 = \pi i$ invece circonda i punti

$$z_{1,1} = \ln(\pi) + \pi i \qquad z_{2,1} = \ln(2\pi) + \pi i \ .$$

In questo caso abbiamo $e^{z_{1,1}} = -\pi$ e $e^{z_{2,1}} = -2\pi$, per cui l'integrale I_2 è opposto al precedente:

$$I_2 = i \ .$$

2. Dall'operatore risolvente

$$R_z(A) = \frac{1}{(z-1)^2}\begin{pmatrix} z & 1 \\ -1 & z-2 \end{pmatrix}$$

otteniamo gli operatori spettrali

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \ .$$

Si ottiene quindi

$$e^{Ax} = e^x P_1 + xe^x J_1 = \begin{pmatrix} e^x + xe^x & xe^x \\ -xe^x & e^x - xe^x \end{pmatrix} \quad .$$

La soluzione dell'equazione differenziale è

$$\mathbf{y}(x) = e^{Ax}\mathbf{c}$$

dove

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} \ .$$

Troviamo $\mathbf{c}$ imponendo $\mathbf{y}(-1) = \mathbf{a}$. Otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -e^{-1} \\ e^{-1} & 2e^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ -e \end{pmatrix} \ .$$

La soluzione del primo problema di Cauchy è quindi

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x + xe^x & xe^x \\ -xe^x & e^x - xe^x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e \\ -e \end{pmatrix} \ ,$$

ovvero

$$y_1(x) = e^{x+1} \qquad y_2(x) = -e^{x+1} \ .$$

In presenza della delta, dobbiamo imporre una discontinuità in $x = 0$. La soluzione per $x < 0$ è la stessa di prima, e

$$\mathbf{y}(0^+) - \mathbf{y}(0^-) = \mathbf{b} \ .$$

Quindi
$$\begin{pmatrix} y_1(0^+) \\ y_2(0^+) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e \\ -e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-e \\ e \end{pmatrix}$$
da cui
$$\mathbf{y}(0^+) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
e la soluzione per $x > 0$ è
$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x + xe^x & xe^x \\ -xe^x & e^x - xe^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ ,$$
ovvero
$$y_1(x) = e^x + xe^x \qquad y_2(x) = -xe^x \ .$$