MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Soluzioni esame scritto - 30 giugno 2020 - Canale M-Z

1a. La funzione ha punti di diramazione 1 e -1 e il taglio congiunge sull'asse reale questi due punti. Vengono considerati quattro casi che possiamo trattare separatamente.

- il primo caso corrisponde alle scelte di segno $+-$ con la radice immaginaria positiva sotto il taglio. Abbiamo quindi i poli

$$z_1 = -\frac{i}{2} \qquad z_2 = i \quad .$$

La radice è immaginaria positiva per tutti i punti lungo l'asse immaginario negativo e di conseguenza è immaginaria negativa in tutti i punti lungo l'asse immaginario positivo. Quindi

$$(z_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{2} i \qquad (z_2 - 1)^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{2} i \quad .$$

Abbiamo

$$I_1 = 2\pi i \text{Res}[f(z), z_1] = 2\pi i \frac{1}{2} \frac{(z_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{z_1 - i} = -\pi i \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$I_2 = 2\pi i \text{Res}[f(z), z_2] = 2\pi i \frac{(z_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{2z_2 + i} = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \pi i \ .$$

Per calcolare il residuo all'infinito, dobbiamo calcolare la determinazione della radice all'infinito, ad esempio lungo l'asse immaginario positivo. Sappiamo che la radice è immaginaria negativa lungo questo semiasse, quindi definendo $w = \frac{1}{z}$ abbiamo che

$$(z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{w}(1 - w^2)^{\frac{1}{2}}$$

è un numero immaginario negativo per $\frac{1}{w}$ immaginario positivo e w molto piccolo. Questo significa che

$$(1 - w^2)^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{1 - w^2}$$

per w molto piccolo. Calcoliamo quindi il residuo in $w = 0$ della funzione

$$-\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) = -\frac{1}{w^2}\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{w}(1-w^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{w^2}(1+\frac{i}{2}w)(1-iw)} = \frac{1}{2}\frac{1}{w}\frac{\sqrt{1-w^2}}{(1+\frac{i}{2}w)(1-iw)} \ .$$

La funzione ha un polo semplice in $w = 0$ e il residuo è

$$\text{Res}[f(z), z = \infty] = \frac{1}{2} \ .$$

L'integrale lungo γ_3 è uguale a $-2\pi i$ per la somma dei residui esterni, incluso il residuo all'infinito. Quindi

$$I_3 = \pi i \left[\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} - 1\right] \ .$$

- Il secondo caso corrisponde sempre alla combinazione $+-$ con determinazione opposta rispetto al caso precedente, quindi tutti i risultati sono opposti. I poli sono sempre

$$z_1 = -\frac{i}{2} \qquad z_2 = i$$

e si ottiene

$$I_1 = 2\pi i \text{Res}[f(z), z_1] = \pi i \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$I_2 = 2\pi i \text{Res}[f(z), z_2] = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi i$$

$$\text{Res}[f(z), z = \infty] = -\frac{1}{2}$$

$$I_3 = -\pi i \left[\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} - 1\right] \ .$$

- Il terzo caso corrisponde alla combinazione $-+$ con determinazione immaginaria positiva sopra e quindi negativa sotto il taglio (come nel caso precedente). I poli sono quindi

$$z_1 = \frac{i}{2} \qquad z_2 = -i$$

e gli integrali sono

$$I_1 = 2\pi i \mathrm{Res}[f(z), z_1] = 2\pi i \frac{1}{2}\frac{(z_1^2-1)^{\frac{1}{2}}}{z_1+i} = \pi i \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$I_2 = 2\pi i \mathrm{Res}[f(z), z_2] = 2\pi i \frac{(z_1^2-1)^{\frac{1}{2}}}{2z_2-i} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi i \ .$$

Dal momento che la determinazione è come nel caso precedente, il residuo all'infinito è come nel caso precedente, ovvero

$$\mathrm{Res}[f(z), z=\infty] = -\frac{1}{2}$$

e quindi

$$I_3 = -\pi i \left[\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} - 1\right] \ .$$

- Infine l'ultimo caso è la combinazione $-+$ con radice immaginaria negativa sopra il taglio, e quindi opposta al caso precedente. I poli sono

$$z_1 = \frac{i}{2} \qquad z_2 = -i$$

da cui

$$I_1 = 2\pi i \mathrm{Res}[f(z), z_1] = -\pi i \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$I_2 = 2\pi i \mathrm{Res}[f(z), z_2] = -\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi i$$

$$\mathrm{Res}[f(z), z=\infty] = \frac{1}{2}$$

$$I_3 = \pi i \left[\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} - 1\right] \ .$$

1b. La funzione ha punti di diramazione i e $-i$ e il taglio congiunge questi punti lungo l'asse immaginario. Anche per questo esercizio abbiamo quattro casi che consideriamo separatamente.

- Il primo caso è la combinazione $+-$ con radice reale positiva a sinistra del taglio. I poli sono

$$z_1 = -\frac{1}{2} \qquad z_2 = 1 \quad .$$

La radice è reale positiva per tutti i punti lungo l'asse reale negativo e di conseguenza è reale negativa in tutti i punti lungo l'asse reale positivo. Quindi

$$(z_1^2+1)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad (z_2+1)^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{2} \quad .$$

Abbiamo

$$I_1 = 2\pi i \mathrm{Res}[f(z), z_1] = 2\pi i \frac{1}{2}\frac{(z_1^2+1)^{\frac{1}{2}}}{z_1-1} = -\pi i\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$I_2 = 2\pi i \mathrm{Res}[f(z), z_2] = 2\pi i \frac{(z_1^2+1)^{\frac{1}{2}}}{2z_2+1} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi i \ .$$

Per calcolare il residuo all'infinito, dobbiamo calcolare la determinazione della radice all'infinito, ad esempio lungo l'asse reale positivo. Sappiamo che la radice è reale negativa lungo questo semiasse, quindi definendo $w = \frac{1}{z}$ abbiamo che

$$(z^2+1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{w}(1+w^2)^{\frac{1}{2}}$$

è un numero reale negativo per $\frac{1}{w}$ reale positivo e w molto piccolo. Questo significa che

$$(1+w^2)^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{1+w^2}$$

per w molto piccolo. Calcoliamo quindi il residuo in $w = 0$ della funzione

$$-\frac{1}{w^2}f\left(\frac{1}{w}\right) = -\frac{1}{w^2}\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{w}(1+w^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{w^2}(1+\frac{1}{2}w)(1-w)} = \frac{1}{2}\frac{1}{w}\frac{\sqrt{1+w^2}}{(1+\frac{1}{2}w)(1-w)} \ .$$

La funzione ha un polo semplice in $w = 0$ e il residuo è

$$\mathrm{Res}[f(z), z = \infty] = \frac{1}{2} \ .$$

L'integrale lungo γ_3 è uguale a $-2\pi i$ per la somma dei residui esterni, incluso il residuo all'infinito. Quindi

$$I_3 = \pi i \left[\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} - 1 \right] .$$

- Il secondo caso corrisponde sempre alla combinazione $+-$ con determinazione opposta rispetto al caso precedente, quindi tutti i risultati sono opposti. I poli sono sempre

$$z_1 = -\frac{1}{2} \qquad z_2 = 1$$

e si ottiene

$$I_1 = 2\pi i \mathrm{Res}[f(z), z_1] = \pi i \frac{\sqrt{5}}{3}$$
$$I_2 = 2\pi i \mathrm{Res}[f(z), z_2] = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi i$$
$$\mathrm{Res}[f(z), z = \infty] = -\frac{1}{2}$$
$$I_3 = -\pi i \left[\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} - 1 \right] .$$

- Il terzo caso corrisponde alla combinazione $-+$ con determinazione reale positiva a destra e quindi negativa a sinistra del taglio (come nel caso precedente). I poli sono quindi

$$z_1 = \frac{1}{2} \qquad z_2 = -1$$

e gli integrali sono

$$I_1 = 2\pi i \mathrm{Res}[f(z), z_1] = 2\pi i \frac{1}{2} \frac{(z_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{z_1 + i} = \pi i \frac{\sqrt{5}}{3}$$
$$I_2 = 2\pi i \mathrm{Res}[f(z), z_2] = 2\pi i \frac{(z_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{2z_2 - i} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi i .$$

Dal momento che la determinazione è come nel caso precedente, il residuo all'infinito è come nel caso precedente, ovvero

$$\mathrm{Res}[f(z), z = \infty] = -\frac{1}{2}$$

e quindi

$$I_3 = -\pi i \left[\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} - 1 \right] \ .$$

- Infine l'ultimo caso è la combinazione $-+$ con radice reale negativa a destra del taglio, e quindi opposta al caso precedente. I poli sono

$$z_1 = \frac{1}{2} \qquad z_2 = -1$$

da cui

$$I_1 = 2\pi i \mathrm{Res}[f(z), z_1] = -\pi i \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$I_2 = 2\pi i \mathrm{Res}[f(z), z_2] = -\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi i$$

$$\mathrm{Res}[f(z), z = \infty] = \frac{1}{2}$$

$$I_3 = -\pi i \left[\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} - 1 \right] \ .$$

2a.,2b. Calcoliamo i coefficienti c_n della serie di Fourier.

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} \cos(ax) \mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} \left[e^{iax} + e^{-iax} \right] \mathrm{d}x \ .$$

Risolvendo gli integrali si trova

$$c_n = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{i(a-n)x}}{i(a-n)} - \frac{e^{-i(a+n)x}}{i(a+n)} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^n \sin(a\pi)}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{a-n} + \frac{1}{a+n} \right]$$

ovvero

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-1)^n \sin(a\pi) \frac{2a}{a^2 - n^2} \ .$$

Da questi coefficienti otteniamo (i coefficienti b_n sono nulli perchè la funzione è pari)

$$a_0 = \frac{2\sin(a\pi)}{a\pi} \qquad a_n = \frac{2a}{\pi} (-1)^n \sin(a\pi) \frac{1}{a^2 - n^2} \ .$$

Quindi la serie in forma trigonometrica è

$$\cos(ax) = \frac{\sin(a\pi)}{a\pi} + \frac{2a}{\pi}\sin(a\pi)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos(nx)}{a^2-n^2} \ .$$

La funzione $\cos(ax)$ è pari, quindi il valore della funzione in $-\pi$ è uguale al suo valore in π. Quindi la funzione periodicizzata è continua e la serie converge al suo valore (è importante però ricordare che a non è intero, e quindi il valore della funzione in π non è ± 1 e la derivata della funzione periodicizzata è discontinua).

Per calcolare la prima somma abbiamo due possibilità. La prima corrisponde a prendere $x = \frac{\pi}{2}$ e sfruttare la convergenza della serie in questo punto, mentre la seconda corrisponde a prendere $x = 0$, sfruttare la convergenza e ridefinire $a \to \frac{a}{2}$. Usiamo il primo metodo (è facile mostrare che è vero usando il secondo metodo una volta vista la soluzione per il primo metodo). Abbiamo

$$\cos\left(\frac{a\pi}{2}\right) = \sin(a\pi)\left[\frac{1}{a\pi} + \frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{a^2-n^2}\right] \ .$$

Sfruttando $\sin(a\pi) = 2\sin\left(\frac{a\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{a\pi}{2}\right)$ e il fatto che $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ è zero per n dispari possiamo scrivere

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{a\pi}{2}\right)} = \frac{2}{a\pi} + \frac{4a}{\pi}\sum_{n \ \text{pari}} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{a^2-n^2}$$

dove abbiamo usato il fatto che $(-1)^n$ è uguale a 1 per n pari. Scrivendo $n = 2m$, otteniamo $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \cos(m\pi) = (-1)^m$ e quindi

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{a\pi}{2}\right)} = \frac{2}{a\pi} + \frac{4a}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{a^2-(2m)^2} \ .$$

Abbiamo

$$\frac{2a}{a^2-(2m)^2} = \frac{1}{a-2m} + \frac{1}{a+2m}$$

e quindi

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{a\pi}{2}\right)} = \frac{2}{a\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left[\frac{1}{a-2m} + \frac{1}{a+2m}\right] \ ,$$

ed è facile convincersi che questo si può riscrivere

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{a\pi}{2}\right)} = \frac{2}{\pi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(-1)^m\frac{1}{a+2m} \ .$$

Per ottenere la seconda somma usiamo la convergenza della serie in π. Otteniamo

$$\cos(a\pi) = \frac{\sin(a\pi)}{a\pi} + \frac{2a}{\pi}\sin(a\pi)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(n\pi)}{a^2-n^2} \ ,$$

e usando $\cos(n\pi) = (-1)^n$ abbiamo

$$\cot(a\pi) = \frac{1}{a\pi} + \frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^2-n^2} \ .$$

Abbiamo di nuovo

$$\frac{2a}{a^2-n^2} = \frac{1}{a-n} + \frac{1}{a+n}$$

e quindi

$$\cot(a\pi) = \frac{1}{a\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{a-n} + \frac{1}{a+n}\right] \ ,$$

che si può riscrivere come

$$\cot(a\pi) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a+n} \ .$$

2c. Calcoliamo i coefficienti c_n della serie di Fourier.

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\sin(ax)\mathrm{d}x = \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\left[e^{iax} - e^{-iax}\right]\mathrm{d}x \ .$$

Risolvendo gli integrali si trova

$$c_n = \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{i(a-n)x}}{i(a-n)} + \frac{e^{-i(a+n)x}}{i(a+n)}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^n\sin(a\pi)}{i\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{a-n} - \frac{1}{a+n}\right]$$

ovvero

$$c_n = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}}(-1)^n \sin(a\pi)\frac{2n}{a^2-n^2} \ .$$

Da questi coefficienti otteniamo (i coefficienti a_0 e a_n sono nulli)

$$b_n = \frac{2}{\pi}(-1)^n \sin(a\pi)\frac{n}{a^2-n^2} \ .$$

Quindi la serie in forma trigonometrica è

$$\sin(ax) = \frac{2\sin(a\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n\sin(nx)}{a^2-n^2} \ .$$

La funzione $\sin(ax)$ è dispari, quindi il valore della funzione in $-\pi$ è opposto al suo valore in π (e non è zero perché a non è intero). Quindi la funzione periodicizzata è discontinua e la serie converge in π a zero che è il valore medio tra $\sin(a\pi)$ e $\sin(-a\pi)$.

Per calcolare la somma sfruttiamo la convergenza della serie in $x = \frac{\pi}{2}$. Otteniamo

$$\sin\left(\frac{a\pi}{2}\right) = \frac{2\sin(a\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{a^2-n^2} \ .$$

Sfruttando $\sin(a\pi) = 2\sin\left(\frac{a\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{a\pi}{2}\right)$ e il fatto che $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ è zero per n pari e che $(-1)^n = -1$ per n dispari possiamo scrivere

$$\frac{1}{\cos\left(\frac{a\pi}{2}\right)} = -\frac{4}{\pi}\sum_{n \text{ dispari}}\frac{n\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{a^2-n^2} \ .$$

Ponendo $n = 2m+1$, abbiamo $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2}\right) = (-1)^m$, e quindi

$$\frac{1}{\cos\left(\frac{a\pi}{2}\right)} = -\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m+1)}{a^2-(2m+1)^2} \ .$$

Abbiamo

$$\frac{2(2m+1)}{a^2-(2m+1)^2} = \frac{1}{a-(2m+1)} - \frac{1}{a+(2m+1)} \ .$$

Sostituendo

$$\frac{1}{\cos\left(\frac{a\pi}{2}\right)} = -\frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\left[\frac{1}{a-(2m+1)} - \frac{1}{a+(2m+1)}\right] \ .$$

Il primo termine si può riscrivere

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{a-(2m+1)} = -\sum_{n=-1}^{-\infty}(-1)^n\frac{1}{a+(2n+1)}$$

da cui si dimostra che

$$\frac{1}{\cos\left(\frac{a\pi}{2}\right)} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a+2n+1} \ .$$