MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Soluzioni esame scritto - 3 maggio 2023 - Canale O-Z

1. La funzione $z^{\frac{1}{3}}$ ha punti di diramazione in $z = 0$ e $z = \infty$ ed ha tre determinazioni. L'argomento del coseno, $z^{\frac{1}{2}}$, ha due determinazioni che differiscono per un segno, ma dal momento che il coseno è una funzione pari, abbiamo che $\cos z^{\frac{1}{2}}$ è una funzione monodroma. Riassumendo, la funzione $z^{\frac{1}{3}} \cos z^{\frac{1}{2}}$ complessivamente ha tre determinazioni.

2. L'integrando è

$$f(z) = \frac{z+2}{z-2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \ ,$$

e si vede facilmente che in primo termine ha un polo semplice in $z = 2$ e il secondo un polo doppio in $z = 1$. La curva γ circonda entrambe le singolarità. Calcoliamo i residui. Abbiamo

$$\mathrm{Res}_{z=2} \frac{z+2}{z-2} = 4 \qquad \mathrm{Res}_{z=1} \frac{z^2}{(z-1)^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} z^2|_{z=1} = 2 \ .$$

Quindi l'integrale è

$$2\pi i \sum \mathrm{Res} f(z) = 2\pi i [4+2] = 12\pi i \ .$$

Per calcolare il residuo all'infinito, scriviamo

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1+2w}{1-2w} + \frac{1}{(1-w)^2} = \frac{1+2w}{1-2w} + \frac{1}{1-2w+w^2} \ .$$

Sviluppando intorno a $w = 0$ otteniamo

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = (1+2w)(1+2w+...) + 1 + 2w + ... = 1 + 6w + ...$$

e quindi

$$g(w) = -\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) = -\frac{1}{w^2} - \frac{6}{w} + ...$$

da cui si deduce che il residuo all'infinito è uguale a -6. Questo è in accordo col fatto che per una funzione meromorfa la somma dei residui deve essere nulla.

3. La matrice ha autovalori $4i$ e $-i$. L'operatore risolvente è

$$R_z(A) = \frac{1}{(z-4i)(z+i)} \begin{pmatrix} z-i & 3 \\ -2 & z-2i \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo i proiettori

$$P_{4i} = \begin{pmatrix} 3/5 & -3i/5 \\ 2i/5 & 2/5 \end{pmatrix} \qquad P_{-i} = \begin{pmatrix} 2/5 & 3i/5 \\ -2i/5 & 3/5 \end{pmatrix} \ .$$

Per calcolare $A^{\frac{1}{2}}$ con la determinazione data, osserviamo che nel foglio dato il punto $4i$ è $4e^{\frac{5i\pi}{2}}$ e il punto $-i$ è $e^{\frac{3i\pi}{2}}$. Quindi, effettuando la radice,

$$A^{\frac{1}{2}} = -2e^{\frac{i\pi}{4}} P_{4i} + e^{\frac{3i\pi}{4}} P_{-i} \ .$$

4. Calcoliamo le trasformate di Fourier. Per $f_1(x)$ troviamo

$$\hat{f}_1(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x e^{-ipx} e^{-|x|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}x e^{-ipx} e^{x}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} \mathrm{d}x e^{-ipx} e^{-x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1-ip} + \frac{1}{1+ip} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+p^2}$$

mentre per $f_2(x)$ si ottiene

$$\hat{f}_2(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x e^{-ipx} = -\frac{e^{-ipx}}{ip} \bigg|_{-1}^{1} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin p}{p} \ .$$

La funzione $g(x)$ è la convoluzione

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y f_1(x-y) f_2(y) \ ,$$

la cui trasformata di Fourier è il prodotto delle trasformate di Fourier di $f_1(x)$ e $f_2(x)$. Quindi

$$\hat{g}(p) = \hat{f}_1(p) \hat{f}_2(p) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin p}{p(1+p^2)} \ .$$