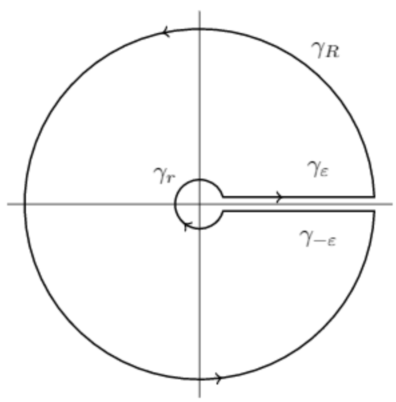
MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Soluzioni esame scritto - 5 luglio 2022 - Canale O-Z

1. Consideriamo la funzione polidroma

$$f_1(z) = \frac{z^{\frac{1}{4}}}{(z+1)^2} \ ,$$

e scegliamo il foglio di Riemann tale che il taglio è lungo l'asse reale positivo e la funzione è reale positiva sopra il taglio. La funzione ha un polo doppio in $z = -1$, e sotto l'asse reale positivo è immaginaria positiva, perché $e^{\frac{2\pi i}{4}} = i$. Integriamo questa funzione lungo la curva γ in figura e consideriamo il limite $r \to 0$ e $R \to \infty$.



Otteniamo

$$I_\gamma \to I_{\gamma_\epsilon} + I_{\gamma_{-\epsilon}} = (1-i)I_1 \ .$$

Possiamo calcolare l'integrale usando il teorema dei residui. Abbiamo

$$(1-i)I_1 = 2\pi i \text{Res}_{z=-1} f_1(z) = 2\pi i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z+1)^2 f_1(z)|_{z=-1} = 2\pi i \frac{1}{4} z^{-\frac{3}{4}}|_{z=-1} \ .$$

Sul foglio di Riemann in cui siamo $-1 = e^{i\pi}$, per cui $(-1)^{-\frac{3}{4}} = e^{-\frac{3\pi i}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$. Sostituendo

$$(1-i)I_1 = -\frac{\pi i}{2\sqrt{2}}(1+i)$$

ovvero

$$I_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \ .$$

Consideriamo ora la funzione polidroma

$$f_2(z) = \frac{z^{\frac{1}{4}} \log z}{(z+1)^2}$$

sullo stesso foglio di Riemann, con determinazione del logaritmo tale che il logaritmo è reale sopra il taglio. Sotto il taglio, il logaritmo ha quindi una parte immaginaria uguale a 2π.

Integrando lungo la stessa curva γ otteniamo

$$I_\gamma \to I_2 - i(I_2 + 2\pi i I_1) \ .$$

Usando di nuovo il teorema dei residui abbiamo

$$I_2 - i(I_2 + 2\pi i I_1) = 2\pi i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z+1)^2 f_2(z)|_{z=-1} = 2\pi i \left[\frac{1}{4} z^{-\frac{3}{4}} \log z + z^{-\frac{3}{4}}\right]_{z=-1} \ .$$

Sul foglio in cui siamo, $\log(-1) = \pi i$, e quindi

$$I_2 - i(I_2 + 2\pi i I_1) = (1-i)I_2 + 2\pi I_1 = \frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}(1+i) - \frac{2\pi i}{\sqrt{2}}(1+i)$$

e sostituendo il valore di I_1

$$(1-i)I_2 = -\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}(1-i) + \frac{2\pi}{\sqrt{2}}(1-i)$$

da cui

$$I_2 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(4-\pi) \ .$$

2. La matrice ha autovalori 1 e 2. Il risolvente è

$$R_z(A) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} \begin{pmatrix} z+1 & -2 \\ 3 & z-4 \end{pmatrix} \ ,$$

da cui otteniamo i proiettori

$$P_1 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \ .$$

Si ottiene quindi
$$e^{Ax} = e^x P_1 + e^{2x} P_2 \ .$$
La soluzione dei problema omogeneo è
$$\mathbf{y}(x) = e^{Ax}\mathbf{y}(0)$$
e sostituendo si ottiene
$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$
Consideriamo ora il problema con la funzione θ. Per $x < \log 2$ la soluzione è quella precedente. La soluzione per $x > \log 2$, quando la θ vale 1, è data da una soluzione particolare più una soluzione omogenea. La soluzione particolare è
$$\mathbf{y}_{\mathrm{p}}(x) = -A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
ovvero
$$\mathbf{y}_{\mathrm{p}}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$
Quindi per $x > \log 2$ la soluzione è
$$\mathbf{y}(x) = e^{Ax} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$
Dobbiamo determinare a e b imponendo che $\mathbf{y}(x)$ sia continua in $x = \log 2$. Usando la soluzione omogenea, per $x = \log 2$ otteniamo
$$\mathbf{y}(\log 2^-) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \ ,$$
mentre la soluzione per $x > \log 2$ fornisce
$$\mathbf{y}(\log 2^+) = \begin{pmatrix} 8a - 4b \\ 6a - 2b + 1 \end{pmatrix}$$
e imponendo la continuità si trova
$$a = \frac{1}{2} \qquad b = 0 \ .$$
Sostituendo, la soluzione esplicita per $x > \log 2$ è
$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^x + \frac{3}{2}e^{2x} \\ -\frac{3}{2}e^x + \frac{3}{2}e^{2x} + 1 \end{pmatrix} \ .$$