MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Soluzioni esame scritto - 6 luglio 2021 - Canale Mf-Z

1. Consideriamo la funzione polidroma

$$f(z) = \frac{z^{-\frac{1}{3}}}{z+1}$$

e scegliamo il taglio lungo l'asse reale positivo e la determinazione tale che la radice cubica è reale positiva sopra il taglio. Integriamo $f(z)$ lungo la curva Γ che circonda il taglio, si chiude all'infinito ed è percorsa in senso antiorario. Abbiamo

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}z\, f(z)_{\text{sopra}} - \int_0^{+\infty} \mathrm{d}z\, f(z)_{\text{sotto}} \ .$$

Sotto al taglio abbiamo

$$z^{-\frac{1}{3}} = e^{-\frac{2\pi i}{3}} \sqrt[3]{x} \ ,$$

da cui

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \left(1 - e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right) I_0 \ .$$

Calcoliamo l'integrale lungo Γ utilizzando il teorema dei residui. La funzione $f(z)$ ha un polo semplice in $z_0 = -1$, e la determinazione di ${z_0}^{-\frac{1}{3}}$ nel foglio di Riemann scelto è

$${z_0}^{-\frac{1}{3}} = e^{-\frac{i\pi}{3}} \ .$$

Quindi

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \mathrm{Res}_{z=-1} f(z) = 2\pi i e^{-\frac{i\pi}{3}} \ .$$

Sostituendo si ottiene

$$I_0 = 2\pi i \frac{e^{-\frac{i\pi}{3}}}{1 - e^{-\frac{2\pi i}{3}}} = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}$$

ovvero

$$I_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \ .$$

Per calcolare I_1 consideriamo la funzione polidroma

$$g(z) = \frac{z^{-\frac{1}{3}} \log z}{z+1}$$

con lo stesso taglio di prima e la stessa determinazione della radice, e determinazione reale per il logaritmo sopra il taglio. Questo significa che sotto il taglio abbiamo

$$\log z = \log x + 2\pi i \ .$$

Integrando lungo la stessa curva Γ di prima abbiamo quindi

$$\int_\Gamma g(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}z\, g(z)_{\text{sopra}} - \int_0^{+\infty} \mathrm{d}z\, g(z)_{\text{sotto}}$$
$$= \int_0^\infty \frac{\log x\,\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}(x+1)} - e^{-\frac{2\pi i}{3}} \int_0^\infty \frac{(\log x + 2\pi i)\,\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}(x+1)}$$

ovvero

$$\int_\Gamma g(z)\,\mathrm{d}z = \left(1 - e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right) I_1 - 2\pi i e^{-\frac{2\pi i}{3}} I_0 \ .$$

L'integrale lungo Γ si calcola utilizzando il teorema dei residui. Abbiamo un polo semplice in $z_0 = -1$, e la determinazione del logaritmo in questo punto è

$$\log z_0 = \pi i \ .$$

Quindi

$$\int_\Gamma g(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \mathrm{Res}_{z=-1} g(z) = -2\pi^2 e^{-\frac{i\pi}{3}} \ .$$

Sostituendo abbiamo

$$I_1 = \frac{-2\pi^2 e^{-\frac{i\pi}{3}} + 2\pi i e^{-\frac{2\pi i}{3}} I_0}{1 - e^{-\frac{2\pi i}{3}}}$$

che può essere riscritto come

$$I_1 = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} \left(\pi i + e^{-\frac{i\pi}{3}} I_0\right) \ .$$

Ricordando che $e^{-\frac{i\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e sapendo che $I_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ abbiamo

$$e^{-\frac{i\pi}{3}} I_0 = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \pi i$$

e quindi

$$I_1 = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

ovvero

$$I_1 = \frac{2\pi^2}{3} \ .$$

2. La matrice ha autovalori $\lambda_1 = 1$ (con molteplicità algebrica 2) e $\lambda_2 = 4i$. Calcoliamo il risolvente. Otteniamo

$$R_z(A) = \frac{1}{(z-1)^2(z-4i)}\begin{pmatrix}(z-1)(z-4i) & z-4i & 0\\ 0 & (z-1)(z-4i) & 0\\ z-1 & z & (z-1)^2\end{pmatrix}$$

ovvero

$$R_z(A) = \begin{pmatrix}\frac{1}{z-1} & \frac{1}{(z-1)^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{z-1} & 0\\ \frac{1}{(z-1)(z-4i)} & \frac{z}{(z-1)^2(z-4i)} & \frac{1}{z-4i}\end{pmatrix} \ .$$

Ci accorgiamo che il risolvente ha un polo doppio in $z = 1$ e quindi A non è diagonalizzabile. Calcoliamo gli operatori spettrali. Otteniamo (utilizzando per la prima matrice la formula per calcolare residui di poli doppi)

$$P_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{1-4i} & -\frac{4i}{(1-4i)^2} & 0\end{pmatrix}$$

$$J_1 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{1-4i} & 0\end{pmatrix}$$

$$P_{4i} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{1-4i} & \frac{4i}{(1-4i)^2} & 1\end{pmatrix} \ .$$

Per qualunque funzione olomorfa $f(z)$ abbiamo quindi

$$f(A) = f(1)P_1 + f'(1)J_1 + f(4i)P_{4i} \ .$$

Prendendo $f(z) = e^{2z}$ otteniamo

$$e^{2A} = e^2P_1 + 2e^2J_1 + e^{8i}P_{4i} \ .$$

Per determinare tutte le matrici B tali che $B^2 = A$, dobbiamo considerare la funzione polidroma $f(z) = z^{\frac{1}{2}}$, e quindi $f'(z) = \frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}$. Quindi

$$B = 1^{\frac{1}{2}} P_1 + \frac{1}{2} 1^{-\frac{1}{2}} J_1 + (4i)^{\frac{1}{2}} P_{4i} \ ,$$

e sapendo che $(P_1)^2 = P_1$, $(P_{4i})^2 = P_{4i}$, $J_1^2 = 0$, $P_1 J_1 = J_1 P_1 = J_1$, $P_{4i} J_1 = 0$ e $P_1 P_{4i} = 0$, si vede esplicitamente che $B^2 = A$. Dal momento che $P_1 P_{4i} = 0$ e $J_1 P_{4i} = 0$, è facile convincersi che possiamo scegliere la determinazione della radice in 1 in modo indipendente dalla determinazione della radice in $4i$. Possiamo quindi scegliere

$$1^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \qquad\qquad (4i)^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} 2e^{\frac{i\pi}{4}} \\ 2e^{\frac{5i\pi}{4}} \end{cases} \qquad .$$

In conclusione le matrici sono quattro, ovvero

$$B_1 = P_1 + \frac{1}{2} J_1 + 2e^{\frac{i\pi}{4}} P_{4i}$$

$$B_2 = P_1 + \frac{1}{2} J_1 + 2e^{\frac{5i\pi}{4}} P_{4i}$$

$$B_3 = -P_1 - \frac{1}{2} J_1 + 2e^{\frac{i\pi}{4}} P_{4i}$$

$$B_4 = -P_1 - \frac{1}{2} J_1 + 2e^{\frac{5i\pi}{4}} P_{4i} \ .$$