MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Soluzioni esame scritto - 7 novembre 2022 - Canale O-Z

1. La funzione ha poli per $z = k\pi$ (zeri della funzione seno) e per $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (zeri della funzione coseno). Dal momento che la funzione seno è elevata alla seconda, i poli $z = k\pi$ sono poli doppi, con l'eccezione di $z = \pi$, che è un polo semplice per via del numeratore.

   Il primo integrale circonda i poli $z_0 = 0$, $z_1 = \frac{\pi}{2}$ e $z_2 = -\frac{\pi}{2}$. Per calcolare il residuo in z_0, il modo più semplice è determinare i primi termini della serie di Laurent. Abbiamo

$$f(z) = \frac{z-\pi}{(z - \frac{1}{6}z^3 + \dots)^2(1 - \frac{1}{2}z^2 + \dots)}$$

$$= \frac{z-\pi}{z^2(1 - \frac{1}{6}z^2 + \dots)^2(1 - \frac{1}{2}z^2 + \dots)} = \frac{z-\pi}{z^2(1 - \frac{1}{3}z^2 + \dots)(1 - \frac{1}{2}z^2 + \dots)}$$

   e sviluppando le serie geometriche si ottiene

$$f(z) = \frac{z-\pi}{z^2}(1 + \frac{1}{3}z^2 + \dots)(1 + \frac{1}{2}z^2 + \dots) \ ,$$

   da cui si vede che il coefficiente del termine z^{-1} è uguale a 1, ovvero

$$\mathrm{Res}_{z=0} f(z) = 1 \ .$$

   Per i residui in $\pm\frac{\pi}{2}$, ovvero $z = z_1$ e $z = z_2$, abbiamo

$$\mathrm{Res}_{z=z_i} f(z) = \frac{z_i - \pi}{(\sin z_i)^2(\cos z_i)'} = -\frac{z_i - \pi}{(\sin z_i)^3}$$

   da cui si ottiene

$$\mathrm{Res}_{z=\frac{\pi}{2}} f(z) = \frac{\pi}{2} \qquad \mathrm{Res}_{z=-\frac{\pi}{2}} f(z) = -\frac{3\pi}{2} \ .$$

   Unendo i risultati, il primo integrale è

$$I_1 = 2\pi i \left(1 + \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2}\right) = 2\pi i(1 - \pi) \ .$$

Il secondo integrale circonda i poli z_0, z_1 e $z_3 = \pi$. Calcoliamo il residuo in π. Abbiamo

$$\mathrm{Res}_{z=\pi} f(z) = \lim_{z\to\pi} \frac{(z-\pi)^2}{(\sin z)^2 \cos z} = \frac{1}{\cos\pi} = -1 \ .$$

Il secondo integrale è quindi

$$I_2 = 2\pi i \left(1 + \frac{\pi}{2} - 1\right) = \pi^2 i \ .$$

2. Calcoliamo i coefficienti

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} x^2 e^{-inx} \mathrm{d}x \ .$$

Per $n = 0$ otteniamo

$$c_0 = \frac{8\pi^3}{3\sqrt{2\pi}} \ ,$$

mentre per $n \neq 0$ si ottiene, integrando due volte per parti,

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{i}{n} x^2 e^{-inx}|_0^{2\pi} + \frac{2}{n^2} x e^{-inx}|_0^{2\pi} - \frac{2}{n^2} \int_0^{2\pi} e^{-inx} \mathrm{d}x \right)$$

ovvero, essendo l'integrale a destra uguale a zero,

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{4\pi^2 i}{n} + \frac{4\pi}{n^2} \right) \ .$$

Possiamo quindi da c_n calcolare i coefficienti della serie in forma trigonometrica,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (c_n + c_{-n}) = \frac{4}{n^2}$$

$$b_n = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} (c_n - c_{-n}) = -\frac{4\pi}{n}$$

e unendo i risultati insieme si ottiene la serie di Fourier

$$x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \ .$$

La funzione x^2 periodicizzata ha una discontinuità in $x = 0$ (vale $4\pi^2$ per $x = 0^-$ e 0 per $x = 0^+$), e la serie converge al punto medio, ovvero $2\pi^2$. Inoltre il coseno vale 1 e il seno 0 per $x = 0$. Quindi

$$2\pi^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

ovvero

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \ .$$

L'identità di Parseval ci dice che

$$\int_0^{2\pi} x^4 \mathrm{d}x = \frac{32\pi^5}{5} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

ovvero

$$\frac{32\pi^5}{5} = \frac{32\pi^5}{9} + 16\pi^3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + 16\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

e usando la somma precedente si ottiene

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \ .$$

3. L'equazione caratteristica è

$$\lambda^2 + (1-i)\lambda - i = 0$$

i cui zeri sono

$$\lambda_1 = i \qquad \lambda_2 = -1 \ .$$

L'operatore risolvente è

$$(z\mathbb{I} - A)^{-1} = \frac{1}{(z+1)(z-i)} \begin{pmatrix} z+i & 1+i \\ 2 & z+1-2i \end{pmatrix}$$

da cui si ottengono i proiettori

$$P_i = \begin{pmatrix} \frac{2i}{1+i} & 1 \\ \frac{2}{1+i} & \frac{1-i}{1+i} \end{pmatrix} \qquad P_{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{1+i} & -1 \\ -\frac{2}{1+i} & \frac{2i}{1+i} \end{pmatrix} \ .$$

Otteniamo quindi

$$e^A = e^i P_i + e^{-1} P_{-1} \ .$$