MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Soluzioni esame scritto - 8 febbraio 2023 - Canale O-Z

1. Scrivendo $z = e^{i\theta}$, abbiamo $\cos\theta = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$, e quindi possiamo riscrivere l'integrale come

$$I = \oint \frac{\mathrm{d}z}{iz} \frac{3z^2 + 2z + 3}{z^2 + 6z + 1}$$

dove l'integrale è lungo la circonferenza unitaria sul piano complesso percorsa in senso antiorario. Dobbiamo determinare i poli dell'integrando. Oltre al polo $z_0 = 0$, ci sono poli corrispondenti agli zeri di $z^2 + 6z + 1$, ovvero

$$z_1 = -3 + 2\sqrt{2} \qquad z_2 = -3 - 2\sqrt{2} \ .$$

Si può facilmente verificare che solo z_1 è interno al cerchio, e che il numeratore è non nullo per questo valore di z, per cui il punto è effettivamente un polo semplice. Dal teorema dei residui si ottiene

$$I = 2\pi i \left[\mathrm{Res}_{z=z_0} + \mathrm{Res}_{z=z_1}\right] \frac{3z^2 + 2z + 3}{iz(z^2 + 6z + 1)} \ .$$

Si ottiene

$$I = 2\pi \left[3 + \frac{3z_1^2 + 2z_1 + 3}{z_1(z_1 - z_2)}\right] \ .$$

Effettuando i calcoli, otteniamo

$$I = 2\pi(3 - 2\sqrt{2}) \ .$$

2. La matrice ha autovalore $\lambda = 1$ con molteplicità algebrica 2. Il risolvente è

$$R_z(A) = \frac{1}{(z-1)^2} \begin{pmatrix} z-3 & 1 \\ -4 & z+1 \end{pmatrix} \ ,$$

che ha poli doppi e quindi la matrice non è diagonalizzabile. Si ottengono gli operatori spettrali

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

Abbiamo quindi, per ogni funzione analitica $f(z)$,

$$f(A) = f(1)P + f'(1)J$$

e considerando la funzione $f_x(z) = x^z$ si ottiene

$$x^A = x\ P + x \log x\ J = \begin{pmatrix} x - 2x\log x & x\log x \\ -4x\log x & x + 2x\log x \end{pmatrix} .$$

La soluzione del primo problema di Cauchy è

$$\mathbf{y}(x) = x^A \mathbf{y}_0$$

e sostituendo si ottiene

$$\begin{cases} y_1(x) = x \\ y_2(x) = 2x \ . \end{cases}$$

Per risolvere il secondo problema di Cauchy, osserviamo che $\mathbf{y}(x)$ deve avere la discontinuità in $x = e$

$$\mathbf{y}(e^+) - \mathbf{y}(e^-) = \mathbf{a} \ .$$

La soluzione coincide con la soluzione appena trovata per $x < e$, mentre per $x > e$ è

$$\mathbf{y}(x) = x^A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

dove a e b sono determinati dalla relazione di discontinuità. Si ottiene

$$\begin{pmatrix} -e & e \\ -4e & 3e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e \\ 2e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e \end{pmatrix} ,$$

la cui soluzione è

$$a = 0 \qquad b = 1 \ .$$

Sostituendo, la soluzione per $x > e$ è

$$\begin{cases} y_1(x) = x\log x \\ y_2(x) = x + 2x\log x \ . \end{cases}$$