MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Soluzioni esame scritto - 9 febbraio 2022 - Canale Mf-Z

1. Consideriamo la funzione polidroma

$$f(z) = \frac{z^{\frac{1}{2}}}{z^3 - 1} \ .$$

Scegliamo come taglio proprio la semiretta γ e prendiamo sopra il taglio la determinazione data. Questo significa che sotto il taglio la determinazione è opposta. Consideriamo la curva Γ che circonda il taglio e si chiude all'infinito, ed è percorsa in senso antiorario. Abbiamo

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 2I \ .$$

Possiamo calcolare l'integrale lungo Γ utilizzando il teorema dei residui. La funzione $f(z)$ ha tre poli semplici, che corrispondono a risolvere l'equazione $z^3 = 1$. Per assegnare il valore giusto della radice però, dobbiamo scegliere la determinazione di questi poli sul foglio di Riemann che stiamo considerando. La determinazione corretta è

$$z_1 = e^{-\frac{4\pi i}{3}} \qquad z_2 = e^{-\frac{2\pi i}{3}} \qquad z_3 = 1 \ .$$

Dal teorema dei residui si ottiene quindi

$$I = \frac{1}{2} 2\pi i \sum_{z_i} \mathrm{Res}_{z_1} f(z) = \frac{\pi i}{3} \left[\frac{e^{-\frac{2\pi i}{3}}}{e^{-\frac{8\pi i}{3}}} + \frac{e^{-\frac{\pi i}{3}}}{e^{-\frac{4\pi i}{3}}} + 1 \right] = \frac{\pi i}{3} \left[1 - 1 + 1 \right]$$

ovvero

$$I = \frac{\pi i}{3} \ .$$

2. La soluzione dell'equazione è

$$\mathbf{y}(x) = e^{\lambda x} e^{Ax} \mathbf{y}(0) \ .$$

Dobbiamo calcolare e^{Ax}. La matrice A ha autovalori $\pm i$. Si ottiene il risolvente

$$R_z(A) = \frac{1}{z^2+1} \begin{pmatrix} z & i \\ i & z \end{pmatrix} \ ,$$

da cui determiniamo i proiettori

$$P_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad P_{-i} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \ .$$

Prendendo quindi la funzione $f(z) = e^{zx}$ otteniamo

$$e^{Ax} = e^{ix} P_i + e^{-ix} P_{-i}$$

e sostituendo si ottiene

$$e^{Ax} = \begin{pmatrix} \cos x & i \sin x \\ i \sin x & \cos x \end{pmatrix} \ .$$

Il problema di Cauchy dato si risolve sostituendo il valore di $\mathbf{y}(0)$, e si ottiene

$$\begin{cases} y_1(x) = e^{\lambda x} \cos x \\ y_2(x) = i e^{\lambda x} \sin x \end{cases} \ .$$

Scrivendo in generale

$$\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

si ha

$$\begin{cases} y_1(x) = a e^{\lambda x} \cos x + i b e^{\lambda x} \sin x \\ y_2(x) = i a e^{\lambda x} \sin x + b e^{\lambda x} \cos x \end{cases} \ .$$

La condizione $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}(2\pi)$ fornisce le equazioni

$$\begin{cases} a = a e^{2\pi\lambda} \\ b = b e^{2\pi\lambda} \end{cases} \ ,$$

e quindi per ogni a e b si ha soluzione solo se λ assume i valori

$$\lambda = ni$$

dove n è un intero arbitrario.

Il secondo problema al bordo, invece, formisce le equazioni

$$\begin{cases} a = a e^{2\pi\lambda} \\ b = -b e^{2\pi\lambda} \end{cases} \ .$$

Quindi se $b = 0$ abbiamo soluzione per

$$\lambda = ni \ ,$$

mentre se $a = 0$ abbiamo soluzione per

$$\lambda = \left(n + \frac{1}{2}\right) i \ ,$$

con n in entrambi i casi intero.