**MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA**

**Soluzioni esame scritto - 9 settembre 2021 - Canale Mf-Z**

1. Possiamo scrivere la funzione come

$$f(z) = \log(z+1) - \log(z-1) \ .$$

Possiamo considerare il taglio da $-1$ a $+\infty$ per $\log(z+1)$ e il taglio da 1 a $+\infty$ per $\log(z-1)$. Prendiamo entrambe le funzioni reali sopra il taglio per $z > 1$ e spostiamoci verso 1. Aggirando il punto di diramazione in 1 ruotando di $\pi$ in senso antiorario sopra e quindi restando sopra il taglio per la prima funzione, otteniamo una parte immaginaria $-\pi i$ (il segno è il segno della funzione). Proseguendo fino a $-1$ e ruotando ancora in senso antiorario di $\pi$ otteniamo un'ulteriore parte immaginaria $\pi i$ che si cancella con la precedente, per cui la funzione è reale sull'asse reale per $x < -1$. Ruotando ulteriormente di $\pi$ finiamo sotto il taglio, dove la funzione ha una parte immaginaria $\pi i$. Spostandosi fino a 1 sotto il taglio e ruotando di $\pi$ per aggirare da sotto il punto di diramazione scopriamo infine che la funzione è reale per $x > 1$. Questo dimostra che il punto all'infinito non è un punto di diramazione, e gli unici punti di diramazione sono 1 e $-1$, e il taglio è il segmento che li unisce. Inoltre, la determinazione che abbiamo considerato è giusta perché la funzione si annulla all'infinito.

Il percorso $\Gamma$ circonda il taglio, e quindi possiamo calcolare l'integrale usando il residuo all'infinito. Abbiamo

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = -2\pi i \mathrm{Res}_{z=\infty} f(z) = 2\pi i \mathrm{Res}_{w=0}\left[\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right)\right] \ .$$

Quindi

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \mathrm{Res}_{w=0}\left[\frac{1}{w^2}\log\frac{1+w}{1-w}\right] = 2\pi i \mathrm{Res}_{w=0}\left[\frac{1}{w^2}(2w + ...)\right]$$

ovvero

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 4\pi i \ .$$

Lo stesso risultato si poteva ottenere osservando che per il teorema di Cauchy la curva si può deformare nella curva che circonda il taglio, e quindi l'integrale è l'integrale da $-1$ a 1 sotto meno l'integrale da $-1$ a 1 sopra. Dal momento che le parti reali della funzione sotto e della funzione sopra sono le stesse, mentre la parte immaginaria sotto è $\pi i$ e quella sopra è $-\pi i$, il risultato dell'integrale è chiaramente $4\pi i$.

2. Si dimostra facilmente che la matrice ha un unico autovalore

$$\lambda = 2 \ .$$

Si ottiene il risolvente

$$R_z(A) = \frac{1}{(z-2)^2} \begin{pmatrix} z-3 & 1 \\ -1 & z-1 \end{pmatrix} \ ,$$

da cui deriviamo gli operatori spettrali

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \qquad J_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Abbiamo

$$f(A) = f(2)P_2 + f'(2)J_2 \ .$$

Dobbiamo quindi determinare $f(2)$ e $f'(2)$. Scriviamo

$$f(z) = iz^{\frac{1}{2}} \ .$$

Scrivendo $z = \rho e^{i\theta}$, per $z$ reale negativo possiamo avere $\theta = \pm\pi$, ma dobbiamo scegliere $\theta = -\pi$ per avere che la funzione sia positiva. Dal momento che il taglio è sopra, dobbiamo ruotare il senso antiorario e quindi $\theta = 0$ sull'asse reale positivo. Di conseguenza

$$f(2) = i\sqrt{2} \ .$$

Abbiamo poi

$$f'(z) = \frac{i}{2} z^{-\frac{1}{2}}$$

e quindi con la determinazione data

$$f'(2) = \frac{i}{2\sqrt{2}} \ .$$

Si ottiene la matrice

$$f(A) = i \begin{pmatrix} \sqrt{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{i}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} ,$$

e si può verificare che il risultato è giusto mostrando che

$$f(A)^2 = -A .$$

3. Effettuando la trasformata di Fourier rispetto a $x$ otteniamo per ogni $p$ l'equazione del primo ordine

$$\partial_t \hat{f}(p,t) = -p^2 t \hat{f}(p,t) ,$$

la cui soluzione è

$$\hat{f}(p,t) = \hat{f}(p,0) e^{-\frac{p^2 t^2}{2}} .$$

La condizione iniziale $\hat{f}(p,0)$ è la trasformata di Fourier della delta, ovvero

$$\hat{f}(p,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} ,$$

e quindi

$$\hat{f}(p,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{p^2 t^2}{2}} .$$

Per calcolare $f(x,t)$ dobbiamo effettuare l'antitrasformata, ovvero

$$f(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p \; e^{ipx} e^{-\frac{p^2 t^2}{2}} ,$$

e usando l'identità data si trova

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{t} e^{-\frac{x^2}{2t^2}} .$$