MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Soluzioni esame scritto - 9 settembre 2022 - Canale O-Z

1. L'integrando è regolare nell'origine, ed è pari per cui possiamo scrivere

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} \, \mathrm{d}x \quad .$$

Per il teorema di Cauchy, l'integrale è lo stesso se calcolato lungo la curva γ_+ che aggira l'origine nel semipiano superiore e va a $\pm\infty$ sull'asse reale (possiamo scegliere ovviamente anche la curva che aggira l'origine da sotto). Otteniamo

$$I = \frac{1}{2} \int_{\gamma_+} \frac{\sin^2 z}{z^2} \, \mathrm{d}z = -\frac{1}{8} \int_{\gamma_+} \frac{e^{2iz} + e^{-2iz} - 2}{z^2} \, \mathrm{d}z \quad .$$

Separatamente, i tre termini hanno un polo doppio nell'origine. Calcoliamo separatamente i tre termini usando il teorema dei residui. Per il primo termine dobbiamo chiudere l'integrale sopra, e quindi l'integrale è nullo perché il percorso non aggira il polo. Per il secondo termine chiudiamo sotto e quindi dobbiamo calcolare il residuo. Il terzo termine può essere chiuso sia sopra che sotto, ma si vede che il termine ha comunque residuo nullo e quindi non contribuisce. Riassumendo si ottiene (considerando che la curva è percorsa in senso orario)

$$I = -2\pi i \left(-\frac{1}{8} \right) \mathrm{Res}_{z=0} \frac{e^{-2iz}}{z^2} = 2\pi i \frac{1}{8}(-2i)$$

ovvero

$$I = \frac{\pi}{2} \ .$$

Lo stesso integrale si può calcolare utilizzando la parte principale. Dal momento che l'integrale è regolare, abbiamo

$$I = \frac{1}{2} P.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{8} P.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix} + e^{-2ix} - 2}{x^2} \, \mathrm{d}x \quad .$$

Possiamo quindi calcolare la parte principale separando l'integrale in due termini con polo semplice, ovvero

$$I = -\frac{1}{8} P.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix} - 1}{x^2} \, \mathrm{d}x - \frac{1}{8} P.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2ix} - 1}{x^2} \, \mathrm{d}x \quad .$$

Abbiamo per il primo integrale

$$-\frac{1}{8}P.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2ix}-1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{8}(\pi i)(2i) = \frac{\pi}{4}\ ,$$

e il secondo integrale produce un risultato identico. Sommando i due contributi si trova il risultato ottenuto sopra.

2. Calcoliamo il determinante della matrice $z\mathbb{1} - A$. Otteniamo

$$(z-1+i)(z+2)+2-i = z^2+z+iz+i = (z+1)(z+i)\ .$$

Quindi la matrice ha autovalori -1 e $-i$. Calcoliamo il risolvente. Si ottiene

$$R_z(A) = \frac{1}{(z+1)(z+i)}\begin{pmatrix} z+2 & -2+i \\ 1 & z-1+i \end{pmatrix}\ .$$

Troviamo quindi i proiettori

$$P_{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{-1+i} & \frac{-2+i}{-1+i} \\ \frac{1}{-1+i} & \frac{-2+i}{-1+i} \end{pmatrix} \qquad P_{-i} = \begin{pmatrix} \frac{2-i}{1-i} & \frac{-2+i}{1-i} \\ \frac{1}{1-i} & \frac{-1}{1-i} \end{pmatrix}\ .$$

Per calcolare $\log A$, dobbiamo semplicemente capire la determinazione giusta sul foglio di Riemann dato. Scrivendo $z = \rho e^{i\theta}$, abbiamo $\log z = \log\rho + i\theta$, quindi scegliamo $\theta = 0$ per z sull'asse reale positivo. Dato che il taglio è lungo l'asse immaginario positivo, dobbiamo girare in senso orario di $\frac{\pi}{2}$ per raggiungere $-i$ e in senso orario di π per raggiungere -1. Quindi

$$\log(-1) = -i\pi \qquad \log(-i) = -\frac{i\pi}{2}\ ,$$

da cui

$$\log A = -i\pi P_{-1} - \frac{i\pi}{2}P_{-i}\ .$$

3. Risolviamo l'equazione differenziale

$$if'(x) + x^3 f(x) = \lambda f(x)\ .$$

Si ottiene

$$f(x) = f(0)\exp\left(i\frac{x^4}{4} - i\lambda x\right)\ .$$

Imponendo $f(1) = f(0)$ otteniamo

$$\frac{i}{4} - i\lambda = 2k\pi i$$

ovvero

$$\lambda = \lambda_k = \frac{1}{4} + 2k\pi \qquad\qquad k \in \mathbb{Z}\ .$$