Esercizio

In uno spazio vettoriale bi-dimensionale, si consideri l'operatore la cui matrice, in una base ortonormale $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ è data da

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

a) Si dica se σ_y è hermitiano. Si calcolino i suoi autovalori ed autovettori (dandone la loro espressione normalizzata nella base $|1\rangle, |2\rangle$

b) Si calcolino le matrici che rappresentano i proiettori su questi autovett[...] Quindi si verifichi che risultano soddisfatte le relazioni di ortogonalità e di chiusura.

c) stesse domande per la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$

d) stesse domande per la matrice $L_y = \frac{\hbar}{2i}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ nello spazio a 3-[...]

σ_y è una matrice hermitiana perché verifica la proprietà $A_{ij} = A_{ji}^*$

La rappresentazione diadica di un generico operatore è $A = \sum_{ij} A_{ij} |u_i\rangle\langle u_j|$

$\sigma_y = \sigma_{11}|1\rangle\langle 1| + \sigma_{12}|1\rangle\langle 2| + \sigma_{21}|2\rangle\langle 1| + \sigma_{22}|2\rangle\langle 2| = -i|1\rangle\langle 2| + i|2\rangle\langle 1|$

Ora un qualsiasi vettore dello spazio pensato nella base $|1\rangle, |2\rangle$ possiamo rappresenta[...] come $|\psi\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|2\rangle$

<u>autovalori</u> equazione secolare $\det(\sigma_y - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1$

<u>autovettori</u> $\sigma_y|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \Rightarrow$ sostituendo

$$(-i|1\rangle\langle 2| + i|2\rangle\langle 1|)(\alpha|1\rangle + \beta|2\rangle) = \lambda(\alpha|1\rangle + \beta|2\rangle)$$

$$\Rightarrow -i|1\rangle\langle 2|1\rangle\alpha - i\beta|1\rangle\langle 2|2\rangle + i\alpha|2\rangle\langle 1|1\rangle + i\beta|2\rangle\langle 1|2\rangle = \lambda(\alpha|1\rangle + \beta|2\rangle)$$

$$\Rightarrow \quad -i\beta|1\rangle + i\alpha|2\rangle = \lambda(\alpha|1\rangle + \beta|2\rangle)$$

Scrivo per componenti proiettando prima su $|1\rangle$ poi su $|2\rangle$

$$\Rightarrow \begin{cases} -i\beta = \alpha\lambda \\ i\alpha = \beta\lambda \end{cases}$$

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \begin{cases} -i\beta = \alpha \\ i\alpha = \beta \end{cases} \Rightarrow |\lambda_1\rangle = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \text{ 1° autovettore}$$

$$\lambda_2 = -1 \Rightarrow \begin{cases} -i\beta = -\alpha \\ i\alpha = -\beta \end{cases} \Rightarrow |\lambda_2\rangle = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \text{ 2° autovettore}$$

<u>normalizzazione</u>

$$\langle \lambda_1|\lambda_1\rangle = 1 \Rightarrow (\alpha^* \; -i\alpha^*)\begin{pmatrix} \alpha \\ i\alpha \end{pmatrix} = |\alpha|^2 + |\alpha|^2 = 1 \Rightarrow |\alpha|^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle \lambda_2|\lambda_2\rangle = 1 \Rightarrow (\alpha^* \; +i\alpha^*)\begin{pmatrix} \alpha \\ -i\alpha \end{pmatrix} = |\alpha|^2 + |\alpha|^2 = 1 \Rightarrow |\alpha| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow |\lambda_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle + i|2\rangle\right) \qquad |\lambda_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle - i|2\rangle\right)$$

b) matrici dei proiettori nella direzione degli autovettori

$$P_1 = |\lambda_1\rangle\langle\lambda_1| = \left(\frac{|1\rangle + i|2\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\langle 1| - i\langle 2|}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(|1\rangle\langle 1| - i|1\rangle\langle 2| + i|2\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|\right)$$

$$\Rightarrow P_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad \text{nella base } |1\rangle, |2\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(1 \; 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}(1 \; -i) = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = |\lambda_2\rangle\langle\lambda_2| = \frac{1}{2}\left(|1\rangle - i|2\rangle\right)\left(\langle 1| + i\langle 2|\right) = \frac{1}{2}\left(|1\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 2| - i|2\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|\right)$$

$$\Rightarrow P_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \quad \text{nella base } |1\rangle, |2\rangle$$

matrici dei proiettori nella direzione degli autovettori nella base degli autovettori

$P^{(1)}_{11}$ 1° elemento di matrice del proiettore P_1

$$P^{(1)}_{ij} = \langle\lambda_i|P^{(1)}|\lambda_j\rangle = \langle\lambda_i|\lambda_1\rangle\langle\lambda_1|\lambda_j\rangle = \begin{cases} 1 & i=j=1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{nella base } |\lambda_1\rangle, |\lambda_2\rangle$$

$$P^{(2)}_{ij} = \dots = \begin{cases} 1 & i=j=2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ nella base } |\lambda_1\rangle, |\lambda_2\rangle$$

Le relazioni di ortogonalità e chiusura sono soddisfatte $\langle\lambda_i|\lambda_j\rangle = \delta_{ij}$ $\quad P_1 + P_2 = I$ nelle due basi

e) M è hermitiana

$M = 2|1\rangle\langle 1| + i\sqrt{2}|1\rangle\langle 2| - i\sqrt{2}|2\rangle\langle 1| + 3|2\rangle\langle 2|$

autovalori $\det(M-\lambda I)=0 \Rightarrow (2-\lambda)(3-\lambda)-2=0 \Rightarrow \lambda^2-5\lambda+4=0 \quad \lambda_1=1 \quad \lambda_2=4$

autovettori $M|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$

$$\left(2|1\rangle\langle 1| + i\sqrt{2}|1\rangle\langle 2| - i\sqrt{2}|2\rangle\langle 1| + 3|2\rangle\langle 2|\right)(\alpha|1\rangle+\beta|2\rangle) = \lambda(\alpha|1\rangle+\beta|2\rangle)$$

$$2\alpha|1\rangle + i\beta\sqrt{2}|1\rangle - i\sqrt{2}|2\rangle\alpha + 3\beta|2\rangle = \lambda(\alpha|1\rangle+\beta|2\rangle)$$

$$(2\alpha+i\beta\sqrt{2})|1\rangle + (-i\sqrt{2}\alpha+3\beta)|2\rangle = \lambda\alpha|1\rangle + \beta\lambda|2\rangle$$

$\Rightarrow$ Proiettando prima su $|1\rangle$ poi su $|2\rangle$ $\begin{cases} 2\alpha + i\beta\sqrt{2} = \lambda\alpha \\ -i\sqrt{2}\alpha + 3\beta = \lambda\beta \end{cases}$

$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + i\beta\sqrt{2} = \alpha \\ -i\sqrt{2}\alpha + 3\beta = \beta \end{cases}$ Considero solo la prima $i\sqrt{2}\beta = -\alpha \Rightarrow |\lambda_1\rangle = \alpha_1\begin{pmatrix} -i\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 4 \Rightarrow$ (solo la 2°) $-i\sqrt{2}\alpha = \beta \quad \Rightarrow |\lambda_2\rangle = \alpha_2\begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$\langle\lambda_1|\lambda_1\rangle = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix}\alpha_1^* i\sqrt{2} & \alpha_1^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i\alpha_1\sqrt{2} \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = 2|\alpha_1|^2 + |\alpha_1|^2 = 1 \Rightarrow 3|\alpha_1|^2 = 1 \quad |\alpha_1| = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\langle\lambda_2|\lambda_2\rangle = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix}\alpha_2^* & +i\alpha_2^*\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ -i\sqrt{2}\alpha_2 \end{pmatrix} = |\alpha_2|^2 + 2|\alpha_2|^2 = 1 \Rightarrow |\alpha_2| = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$|\lambda_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-i\sqrt{2}|1\rangle + |2\rangle\right) \qquad |\lambda_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|1\rangle - i\sqrt{2}|2\rangle\right)$

matrici proiettori nella direzione degli autovettori nella base $|1\rangle$ $|2\rangle$

$P_1 = |\lambda_1\rangle\langle\lambda_1| = \frac{1}{3}\left(-i\sqrt{2}|1\rangle + |2\rangle\right)\left(+\sqrt{2}i\langle 1| + \langle 2|\right) = \frac{1}{3}\left(2|1\rangle\langle 1| - i\sqrt{2}|1\rangle\langle 2| + i\sqrt{2}|2\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle\right.$

$\Rightarrow P_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -i\sqrt{2} \\ i\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$ analogamente $P_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$

Verifica relazione di chiusura

$$P_1 + P_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}+\frac{1}{3} & -\frac{i\sqrt{2}}{3}+\frac{i\sqrt{2}}{3} \\ \frac{i\sqrt{2}}{3}-\frac{i\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3}+\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Verifica ortogonalità

$$\langle\lambda_1|\lambda_2\rangle = \begin{pmatrix} i\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \end{pmatrix} = (i\sqrt{2} - i\sqrt{2}) = 0$$

d) $L_y = \frac{\hbar}{2i}\begin{pmatrix}0 & \sqrt2 & 0\\ -\sqrt2 & 0 & \sqrt2\\ 0 & -\sqrt2 & 0\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & \frac{\sqrt2}{i} & 0\\ -\frac{\sqrt2}{i} & 0 & \frac{\sqrt2}{i}\\ 0 & -\frac{\sqrt2}{i} & 0\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\sqrt2 & 0\\ i\sqrt2 & 0 & -i\sqrt2\\ 0 & i\sqrt2 & 0\end{pmatrix}$

quindi L_y è una matrice hermitiana

autovalori $\det\begin{pmatrix}-\lambda & -i\sqrt2\frac{\hbar}{2} & 0\\ i\frac{\sqrt2}{2}\hbar & -\lambda & -i\frac{\sqrt2}{2}\hbar\\ 0 & i\frac{\sqrt2}{2}\hbar & -\lambda\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2-\hbar^2)$ $\begin{cases}\lambda_1 = 0\\ \lambda_2 = \hbar\\ \lambda_3 = -\hbar\end{cases}$

$-\lambda\left(\lambda^2-\frac{\hbar^2}{2}\right) - i\frac{\sqrt2}{2}\hbar\left(\lambda i\frac{\sqrt2}{2}\hbar\right) =$
$= -\lambda\left(\lambda^2-\frac{\hbar^2}{2}-\frac{\hbar^2}{2}\right) = -\lambda(\lambda^2-\hbar^2) = 0$

autovettori

$\lambda_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases}x_2 = 0\\ x_1 = x_3\\ x_2 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_2 = 0\\ x_1 = x_3\end{cases} \Rightarrow \boxed{|\lambda_1\rangle = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}$

$\lambda_2 = \hbar \Rightarrow \begin{cases}-\hbar x_1 - i\hbar\frac{\sqrt2}{2}x_2 = 0\\ i\hbar\frac{\sqrt2}{2}x_1 - \hbar x_2 - i\hbar\frac{\sqrt2}{2}x_3 = 0\\ i\hbar\frac{\sqrt2}{2}x_2 - \hbar x_3 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1 = -\frac{\sqrt2}{2}x_2\\ x_2 = i\frac{\sqrt2}{2}x_1 - i\frac{\sqrt2}{2}x_3\\ x_3 = x_2\, i\frac{\sqrt2}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1 = -x_3\\ x_2 = i\sqrt2\, x_1\end{cases} \Rightarrow \ldots$

$\Rightarrow \boxed{|\lambda_2\rangle = \alpha\begin{pmatrix}i\\-\sqrt2\\-i\end{pmatrix}}$ ed analogamente $\boxed{|\lambda_3\rangle = \alpha\begin{pmatrix}i\\ \sqrt2\\ -i\end{pmatrix}}$

verifica

$L_y|\lambda_1\rangle = \lambda_1|\lambda_1\rangle$ $\quad \begin{pmatrix}0 & -i\frac{\sqrt2}{2}\hbar & 0\\ i\sqrt2\frac{\hbar}{2} & 0 & -i\frac{\sqrt2}{2}\hbar\\ 0 & i\frac{\sqrt2}{2}\hbar & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$L_y|\lambda_2\rangle = \lambda_2|\lambda_2\rangle$ $\quad \begin{pmatrix}0 & -i\frac{\sqrt2}{2}\hbar & 0\\ i\frac{\sqrt2}{2}\hbar & 0 & -i\frac{\sqrt2}{2}\hbar\\ 0 & i\frac{\sqrt2}{2}\hbar & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i\\-\sqrt2\\-i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}i\hbar\\ -\frac{\sqrt2}{2}\hbar - \frac{\sqrt2}{2}\hbar\\ -i\hbar\end{pmatrix} = \hbar\begin{pmatrix}i\\-\sqrt2\\-i\end{pmatrix}$

normalizzazione ed ortogonalità

$\langle\lambda_1|\lambda_2\rangle = (1\ 0\ 1)\begin{pmatrix}i\\-\sqrt2\\-i\end{pmatrix} = i + 0 - i = 0$

$\langle\lambda_1|\lambda_3\rangle = (1\ 0\ 1)\begin{pmatrix}i\\ \sqrt2\\ -i\end{pmatrix} = 0$

$\langle\lambda_2|\lambda_3\rangle = (-i\ -\sqrt2\ +i)\begin{pmatrix}i\\ \sqrt2\\ -i\end{pmatrix} = 1 - 2 - 1 = 0$

$\langle\lambda_1|\lambda_1\rangle = (\alpha^*\ 0\ \alpha^*)\begin{pmatrix}\alpha\\0\\\alpha\end{pmatrix} = |\alpha|^2 + |\alpha|^2 = 1 \Rightarrow |\alpha| = \frac{1}{\sqrt2}$

$$\langle \lambda_2 | \lambda_2 \rangle = \left(-i\alpha^* - \alpha^* \sqrt{2} + i\alpha^* \right) \begin{pmatrix} i\alpha \\ -\sqrt{2}\,\alpha \\ -i\alpha \end{pmatrix} = |\alpha|^2 + 2|\alpha|^2 + |\alpha|^2 = 4|\alpha|^2 = 1 \quad \Rightarrow |\alpha| = \frac{1}{2}$$

$$\langle \lambda_3 | \lambda_3 \rangle = 1 \quad \Rightarrow \quad |\alpha| = \frac{1}{2}$$

<u>autovettori normalizzati nella base $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$</u>

$$|\lambda_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1\rangle + |3\rangle \right)$$

$$|\lambda_2\rangle = \frac{1}{2} \left(i|1\rangle - \sqrt{2}|2\rangle - i|3\rangle \right)$$

$$|\lambda_3\rangle = \frac{1}{2} \left(i|1\rangle - \sqrt{2}|2\rangle - i|3\rangle \right)$$

<u>matrici dei proiettori nella direzione degli autovettori nella base $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$</u>

$$P_1 = |\lambda_1\rangle\langle\lambda_1| = \frac{1}{2} \left(|1\rangle + |3\rangle \right) \left(\langle 1| + \langle 3| \right) = \frac{1}{2} \left(|1\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 1| + |3\rangle\langle 3| \right)$$

$$\Rightarrow \quad P_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \frac{1}{4} \left(i|1\rangle - \sqrt{2}|2\rangle - i|3\rangle \right) \left(-i\langle 1| - \sqrt{2}\langle 2| + i\langle 3| \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \Big(|1\rangle\langle 1| - i\sqrt{2}|1\rangle\langle 2| - |1\rangle\langle 3| + i\sqrt{2}|2\rangle\langle 1| + 2|2\rangle\langle 2| - i\sqrt{2}|2\rangle\langle 3| - |3\rangle\langle 1| + i\sqrt{2}|3\rangle\langle 2| + |3\rangle$$

$$\Rightarrow \quad P_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -i\sqrt{2} & -1 \\ i\sqrt{2} & 2 & -i\sqrt{2} \\ -1 & i\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \frac{1}{4} \left(i|1\rangle + \sqrt{2}|2\rangle - i|3\rangle \right) \left(-i\langle 1| + \sqrt{2}\langle 2| + i\langle 3| \right) = \frac{1}{4} \Big(|1\rangle\langle 1| + i\sqrt{2}|1\rangle\langle 2| - |1\rangle\langle 3| +$$

$$i\sqrt{2}|2\rangle\langle 1| + 2|2\rangle\langle 2| + i\sqrt{2}|2\rangle\langle 3| - |3\rangle\langle 1| - i\sqrt{2}|3\rangle\langle 2| + |3\rangle\langle 3| \Big)$$

$$\Rightarrow \quad P_3 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & i\sqrt{2} & -1 \\ -i\sqrt{2} & 2 & i\sqrt{2} \\ -1 & -i\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

<u>verifica relazione di chiusura</u>

$$P_1 + P_2 + P_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \end{pmatrix} = I$$

Si consideri un sistema fisico il cui spazio tri-dimensionale degli stati è generato dalla base ortonormale formata dai tre kets $|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle$. Nella base di questi 3 vettori, presi in questo ordine i due operatori H e B sono definiti da:

$$H = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ con ω_0 e b costanti REALI

a) H e B sono hermitiane? Si sono reali

b) Mostrare che H e B commutano e dare una base comune di autovettori per H e B

c) quale degli insiemi di operatori $\{H\}, \{B\}, \{H,B\}, \{H^2, B\}$ forma un C.S.C.O. (insieme completo di osservabili che commutano)

---

a) H e B sono hermitiane poiché simmetriche e reali $A_{ij} = A^*_{ji} = A_{ji}$

b) $$HB = \hbar\omega_0 b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \hbar\omega_0 b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BH = \hbar\omega_0 b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \hbar\omega_0 b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi $[H, B] = 0$

autovalori di H (diagonale) $\lambda_1 = \hbar\omega_0$ $\quad \lambda_2 = -\hbar\omega_0$ degenere 2 volte

$\Rightarrow$ esiste almeno un sistema di autovettori comuni (se tale sistema è UNICO H e B formano un C.S.C.O.)

<u>autovettori di H</u>

$$\lambda_1 = \hbar\omega_0 \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -2\hbar\omega_0 x_2 = 0 \\ -2\hbar\omega_0 x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow |\lambda_1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

normalizzando $|\lambda_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\lambda_2 = -\hbar\omega_0 \Rightarrow \begin{cases} 2\hbar\omega_0 x_1 = 0 \\ (-\hbar\omega_0 + \hbar\omega_0) x_2 = 0 \\ (-\hbar\omega_0 + \hbar\omega_0) x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow |\lambda_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

<u>autovettori e autovalori di B</u>

$$\det \begin{pmatrix} b-p & 0 & 0 \\ 0 & -p & b \\ 0 & b & -p \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (b-p)(p^2-b^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p_2 = -b \\ p_1 = b \quad \text{degenere 2 volte} \end{cases}$$

$$p_2 = -b \Rightarrow \begin{cases} 2b x_1 = 0 \\ b x_2 + b x_3 = 0 \\ b x_2 + b x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_3 \end{cases} \qquad |p_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ m \\ -m \end{pmatrix}$$

$$p_1 = b \Rightarrow \begin{cases} -x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = x_3 \qquad |p_1\rangle = \begin{pmatrix} l \\ m \\ m \end{pmatrix}$$

Se scegliamo ora $1 = l$ ed $m = 0$

$$\Rightarrow |\lambda_1, p_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} l \\ m \\ m \end{pmatrix}$$

Se scegliamo $l = 0$ $m = \alpha = \beta = 1$

$$\Rightarrow |\lambda_2, p_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} l \\ m \\ m \end{pmatrix}$$

la scelta di autovettori comuni ha completamente risolto la degenerazione degli autovalori

Se scegliamo $\beta = n = -1$ $\alpha = m = 1$

$$\Rightarrow |\lambda_2, p_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ m \\ -m \end{pmatrix}$$

Questi 3 autovettori sono comuni ad H e B e costituiscono una base (unica a meno di un fattore di proporzionalità) normalizzando

	AUTOVALORE DI H	AUTOVALORE DI B
$\lvert\lambda_1, p_1\rangle = \lvert u_1\rangle$	$\hbar\omega_0$	b
$\lvert\lambda_2, p_1\rangle = \frac{\lvert u_2\rangle + \lvert u_3\rangle}{\sqrt{2}}$	$-\hbar\omega_0$	b
$\lvert\lambda_2, p_2\rangle = \frac{\lvert u_2\rangle - \lvert u_3\rangle}{\sqrt{2}}$	$-\hbar\omega_0$	$-b$

R.30

Nella base iniziale avevamo

$$H = \sum_{ij} H_{ij} |u_i\rangle\langle u_j| \qquad B = \sum_{ij} B_{ij} |u_i\rangle\langle u_j|$$

siamo poi passati ad una nuova base costituita dagli autovettori in comune

$$|t_1\rangle = |u_1\rangle \quad |t_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u_2\rangle + |u_3\rangle\right) \quad |t_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u_2\rangle - |u_3\rangle\right)$$

in questa base $H' = \begin{pmatrix} \hbar\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & -\hbar\omega_0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hbar\omega_0 \end{pmatrix}$ e $B' = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$

essendo $\boxed{H' = S^+ H S}$ $\boxed{B' = S^+ B S}$

ed S la matrice di trasformazione $S_{ik} = \langle u_i | t_k \rangle$

$S_{11} = \langle u_1 | t_1 \rangle = \langle u_1 | u_1 \rangle = 1 \qquad S_{12} = \langle u_1 | t_2 \rangle = 0 \qquad S_{13} = \langle u_1 | t_3 \rangle = 0$

$S_{21} = \langle u_2 | t_1 \rangle = \langle u_2 | u_1 \rangle = 0 \qquad S_{22} = \langle u_2 | t_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad S_{23} = \langle u_2 | t_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$S_{31} = \langle u_3 | t_1 \rangle = 0 \qquad S_{32} = \langle u_3 | t_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad S_{33} = \langle u_3 | t_3 \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad S^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

e) - H non può formare un C.S.C.O perchè ha autovalori degeneri

- B " " " " " " " "

- $\{H, B\}$ sì e lo abbiamo appena mostrato
non vi sono infatti due autovettori $|t_i\rangle$ che corrispondono alla stessa coppia di autovalori di H e B. Questo è ie perchè il sistema di autovettori normalizzati per H e B è unico

- $\{H^2, B\}$ non formano un C.S.C.O perchè $H^2 = \hbar^2\omega_0^2 I$ ha un solo autovalore ed inoltre tutti i vettori dello spazio costituiscono autovettori ed alla coppia di autovettori indipendenti $|P_1\rangle$ $|P_2\rangle$ di B corrisponde la medesima coppia $\{\hbar^2\omega_0^2, b\}$ di autovalori

Esercizio

Nello stesso spazio degli stati dell'esercizio precedente, si considerino i due operatori L_z ed S definiti da:

$$L_z|u_1\rangle = |u_1\rangle \qquad L_z|u_2\rangle = 0 \qquad L_z|u_3\rangle = -|u_3\rangle$$

$$S|u_1\rangle = |u_3\rangle \qquad S|u_2\rangle = |u_2\rangle \qquad S|u_3\rangle = |u_1\rangle$$

a) Scrivere le matrici che rappresentano, nella base $|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle$, gli operatori L_z, S, L_z^2, S^2. Questi operatori sono osservabili?

b) Scrivere la più generale matrice che rappresenta un operatore che commuta con L_z. Stessa domanda per L_z^2 ed S^2

c) L_z^2 ed S formano un C.S.C.O? Dare una base di autovettori comuni.

---

a) $L_{11} = \langle u_1|L_z|u_1\rangle = \langle u_1|u_1\rangle = 1 \qquad L_{12} = \langle u_1|L_z|u_2\rangle = 0$

$L_{13} = \langle u_1|L_z|u_3\rangle = -\langle u_1|u_3\rangle = 0 \qquad (\ldots)$

$$\Rightarrow L_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ed analogamente} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad S^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e sono tutte e quattro matrici hermitiane, in uno spazio finito dimensionale $\Rightarrow$ possono essere diagonalizzate $\Rightarrow$ rappresentano degli osservabili

b) Sia $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$ una generica matrice 3x3

vediamo quali condizioni deve soddisfare per commutare con L_z

$$ML_z = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & -m_{13} \\ m_{21} & 0 & -m_{23} \\ m_{31} & 0 & -m_{33}\end{pmatrix} \qquad L_zM = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ -m_{31} & -m_{32} & -m_{33}\end{pmatrix}$$

$$ML_z - L_zM = \begin{pmatrix} 0 & -m_{12} & -2m_{13} \\ m_{21} & 0 & -m_{23} \\ 2m_{31} & m_{32} & 0\end{pmatrix}$$ affinché sia $[L_z, M]=0 \iff M = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & \\ 0 & m_{22} & \\ 0 & 0 & m_{33}\end{pmatrix}$

Cerchiamo la + generale matrice che commuta con $\cancel{S}$ L_z^2:

$$NL_z^2 = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} \\ m_{21} & 0 & m_{23} \\ m_{31} & 0 & m_{33}\end{pmatrix} \qquad L_z^2N = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33}\end{pmatrix}$$

$$NL_z^2 - L_z^2N = \begin{pmatrix} 0 & -m_{21} & 0 \\ m_{21} & 0 & m_{23} \\ 0 & -m_{32} & 0\end{pmatrix} \Rightarrow [N, L_z^2]=0 \iff N = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} \\ 0 & m_{22} & 0 \\ m_{31} & 0 & m_{33}\end{pmatrix}$$

$S^2 = I$ e quindi $\forall$ matrice 3×3 commuta con lei

e) $[L_z^2, S]=0$ perché S è della forma N con $m_{11}=m_{33}=0$

<u>autovalori ed autovettori di L_z^2</u>

$\lambda_1 = 1$ degenere 2 volte $\quad |\lambda_1\rangle = \begin{pmatrix}\alpha\\0\\\beta\end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 0 \quad |\lambda_2\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

<u>autovalori ed autovettori di S</u>

$P_1 = 1$ degenere 2 volte $\quad |P_1\rangle = \begin{pmatrix}l\\m\\l\end{pmatrix}$

$P_2 = -1 \quad |P_2\rangle = \begin{pmatrix}m\\0\\-m\end{pmatrix}$

	AUTOVETTORE	AUTOVALORE L_z^2	AUTOVALORE S	AUTOVETT. NORM.
$l=\alpha=1=\beta$ $m=0$	$\lvert\lambda_1, P_1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$	1	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert u_1\rangle + \lvert u_3\rangle)$
$\alpha = m = 1$ $\beta=-1$	$\lvert\lambda_1, P_2\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$	1	-1	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert u_1\rangle - \lvert u_3\rangle)$
$l=0$ $m=1$	$\lvert\lambda_2, P_1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$	0	1	$\lvert u_2\rangle$

Autovettori comuni corrispondono a coppie distinte di autovalori $\Rightarrow$ formano un C.S.C.O.

Esercizio (CASSANDRO)

Dato l'operatore H che nella base $|1\rangle, |2\rangle$ è descritto dalla matrice

$$H = b\sigma_y = b\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

a) calcolare autovalori ed autovettori di H

b) Assumendo che lo stato iniziale sia $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$ determinare $|\psi(t)\rangle$

c) Si consideri nella medesima base l'operatore $A = a\begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{pmatrix}$ $a \in \mathbb{R}$
calcolare autovalori ed autovettori di A

d) determinare la probabilità che facendo all'istante t una misura della grandezza fisica associata all'osservabile A si trovi l'autovalore a_1 più piccolo (N.B. autovalori reali xché A è hermitiana) sapendo che all'istante t=0 il sistema si trova nello stato $|1\rangle$

---

1) autovalori di H

$\lambda_1 = -b$

$\lambda_2 = b$

autovettori associati (normalizzati)

$|\lambda_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(i|1\rangle + |2\rangle)$

$|\lambda_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i|1\rangle + |2\rangle)$

2) sia ora $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$ quindi

$|\psi(0)\rangle = c_1|\lambda_1\rangle + c_2|\lambda_2\rangle$

dove $c_1 = \langle\lambda_1|\psi(0)\rangle = \langle\lambda_1|1\rangle \Rightarrow c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-i\langle 1| + \langle 2|\right)|1\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}}$

e $c_2 = \langle\lambda_2|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(i\langle 1| + \langle 2|\right)|1\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \underline{|\psi(0)\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}}|\lambda_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|\lambda_2\rangle}$$

H rappresenta l'hamiltoniana, se faccio quindi una misura dell'energia i valori possibili che posso ottenere sono $\lambda_1 = -b$ e $\lambda_2 = b$ ciascuno con probabilità $|c_1|^2 = \frac{1}{2}$ $|c_2|^2 = \frac{1}{2}$ rispettivamente

ora $|\psi(t)\rangle = c_1 e^{-iE_1 t/\hbar}|\lambda_1\rangle + c_2 e^{-iE_2 \frac{t}{\hbar}}|\lambda_2\rangle =$

$$= c_1 e^{+ibt/\hbar}|\lambda_1\rangle + c_2 e^{-ibt/\hbar}|\lambda_2\rangle = \cancel{e^{+ibt/\hbar}}\left[\frac{-i}{\sqrt2}|\lambda_1\rangle + \frac{i}{\sqrt2} e^{-i2bt/\hbar}|\lambda_2\rangle\right]$$

Perso il fattore di fase che è ininfluente nella definizione dello stato (entrambi modulo)

N.B. la probabilità di ottenere come risultati di una misura di energia al tempo t i valori $E_1=\lambda_1=-b$ $E_2=\lambda_2=b$ sono sempre le stesse come si può vedere (esponenziale ha modulo unitario) ciò non deve sorprendere poiché non dipendendo H esplicitamente da t l'energia si conserva e di conseguenza anche le probabilità.

3) autovalori di A:

$a_1 = -a\sqrt2$

$a_2 = a\sqrt2$

autovettori di A (normalizzati)

$|a_1\rangle = \frac12\left((1+i)|1\rangle - \sqrt2|2\rangle\right)$

$|a_2\rangle = \frac12\left((1+i)|1\rangle + \sqrt2|2\rangle\right)$

Ora i risultati di una possibile misura della grandezza fisica associata ad A possono essere a_1 ed a_2

4) Cerchiamo ora $P_t(A=a_1) = |\langle a_1|\psi(t)\rangle|^2$

N.B. denominatore è 1 $\Leftrightarrow$ funzioni e vettori sono normalizzati

$$|\psi(t)\rangle = \frac{-i}{\sqrt2}|\lambda_1\rangle + \frac{i}{\sqrt2}e^{-i2bt/\hbar}|\lambda_2\rangle \quad \text{nella base } |\lambda_1\rangle, |\lambda_2\rangle$$

è conveniente esprimere $|\psi(t)\rangle$ nella base di partenza

$$|\psi(t)\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|2\rangle = \left[-\frac{i}{\sqrt2}\left(\frac{i}{\sqrt2}\right) - \frac{i^2}{\sqrt2}\left(\frac{e^{-2ibt/\hbar}}{\sqrt2}\right)\right]|1\rangle + \left[-\frac{i}{\sqrt2}\left(\frac{i}{\sqrt2}\right) + \frac{i}{\sqrt2}e^{-2ibt/\hbar}\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)\right]|2\rangle$$

$$= \left(\frac12 + \frac12 e^{-2ibt/\hbar}\right)|1\rangle + \left(\frac12 + \frac{i}{2}e^{-2ibt/\hbar}\right)|2\rangle$$

$$\Rightarrow \langle a_1|\psi(t)\rangle = \left(\frac{1-i}{2}\right)\left(\frac12 + \frac12 e^{-2ibt/\hbar}\right) + \left(-\frac{\sqrt2}{2}\right)\left(\frac12 + \frac{i}{2}e^{-2ibt/\hbar}\right) =$$

$$= \frac14\left[\left(1 + e^{-2ibt/\hbar} - \sqrt2\right) - i\left(1 + e^{-2ibt/\hbar} + \sqrt2 + \sqrt2 e^{-2ibt/\hbar}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{4}$$

$|\psi(t)\rangle$ ... [illegible]

*

Esercizio

Una particella di massa m si trova in un segmento $[0,L]$ ed è descritta al tempo $t=0$ dalla f.d.o. $\psi(x,0)=ax^2+bx+c$. Si chiede di determinare:

1) i coefficienti a, b, c
2) il valor medio dell'energia $\langle E\rangle$
3) la probabilità che una misura dell'energia fornisca il valore $E_n=\dfrac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2mL^2}$
4) $\psi(x,t)$

---

1) Imponiamo le condizioni al contorno per la particella tra pareti di potenziale infinito, libera in $[0,L]$

$$\psi(0)=\psi(L)=0 \qquad \psi(0)\Rightarrow c=0\,; \qquad \psi(L)=aL^2+bL=0 \Rightarrow b=-aL$$

$$\Rightarrow \psi(x,0)=ax^2-aLx=a(x^2-Lx)$$

Condizione di normalizzazione

$$\int_0^L|\psi(x,0)|^2dx=1=\int_0^L a^2(x^2-Lx)^2dx=a^2\left[\frac{x^5}{5}-2L\frac{x^4}{4}+L^2\frac{x^3}{3}\right]_0^L=$$

$$=\frac{L^5a^2}{30}=1 \quad\Rightarrow\quad a=\sqrt{\frac{30}{L^5}}$$

$$\Rightarrow\quad \psi(x,0)=\sqrt{\frac{30}{L^5}}\,(x^2-Lx)$$

2) $$\langle E\rangle=\int_0^L\psi^*(x,0)\,\hat H\,\psi(x,0)\,dx \qquad \text{dove}\quad \hat H=\frac{P^2}{2m}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,0)=\sqrt{\frac{30}{L^5}}\,(2x-L) \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,0)=2\sqrt{\frac{30}{L^5}}$$

$$\Rightarrow \langle E\rangle=-\frac{\hbar^2}{2m}\,2\left(\sqrt{\frac{30}{L^5}}\right)^2\int_0^L(x^2-Lx)\,dx=\frac{5\hbar^2}{mL^2}$$

N. 20

3) Le autofunzioni di una particella libera sono

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad\text{e gli autovalori sono}\quad E_n=\frac{\pi^2n^2\hbar^2}{2mL^2}$$

$$\psi(x,0)=\sum_n c_n\,\psi_n(x)$$

$$\Rightarrow c_n = \int_0^L \psi_n^*(x)\,\psi(x,0)\,dx =$$

$$= \int_0^L \sqrt{\frac{2}{L}}\,\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sqrt{\frac{30}{L^5}}\,(x^2 - Lx)\,dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{L}}\sqrt{\frac{30}{L^5}}\left\{\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)x^2\,dx - L\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)x\,dx\right\} =$$ cambio variabile $\frac{n\pi x}{L} = y$

$$= \sqrt{\frac{60}{L^6}}\left\{\int_0^{n\pi} \frac{L^3}{n^3\pi^3}\,y^2 \sin y\,dy - \frac{L^3}{n^2\pi^2}\int_0^{n\pi} y\sin y\,dy\right\} =$$

$$= \sqrt{\frac{60}{L^6}}\,\frac{L^3}{n^2\pi^2}\left\{\frac{1}{n\pi}\Big(2y\sin y - (y^2-2)\cos y\Big)_0^{n\pi} - \Big(\sin y - y\cos y\Big)_0^{n\pi}\right\} =$$

$$= \frac{\sqrt{60}}{n^2\pi^2}\left\{-\frac{1}{n\pi}(\cancel{n^2\pi^2}-2)\cos n\pi - \frac{2}{n\pi} + \cancel{n\pi\cos n\pi}\right\} \Rightarrow$$

$$= -n\pi\cos n\pi + \frac{2}{n\pi}\cos n\pi - \frac{2}{n\pi} + n\pi\cos n\pi$$

$$\Rightarrow c_n = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ -\dfrac{4}{n^3}\dfrac{\sqrt{60}}{\pi^3} & n \text{ dispari} \end{cases} \longrightarrow -\frac{8}{n^3}\frac{\sqrt{15}}{\pi^3}$$

allora la probabilità: $|c_n|^2 = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ \dfrac{16\cdot 60}{n^6\pi^6} & n \text{ dispari} \end{cases}$

4) $$\Psi(x,t) = \sum_n^{\infty} c_n\,\psi_n(x)\,e^{-iE_n\frac{t}{\hbar}} = \text{(def.)}$$

$$= -\frac{8\sqrt{15}}{\pi^3}\sum_k^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\,\sin\frac{(2k+1)\pi}{L} \times e^{-i\frac{\pi^2\hbar^2(2k+1)^2}{2mL^2}\frac{t}{\hbar}}$$

$n = 2k+1$ cioè dispari

se n è pari $\psi(x,t) \equiv 0$

Esercizio (CASSANDRO)

Una particella di massa m è vincolata a muoversi in una dimensione ed è soggetta all'azione del potenziale

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & |x|>a \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\gamma\,\delta(x) & |x|<a \end{cases}$$

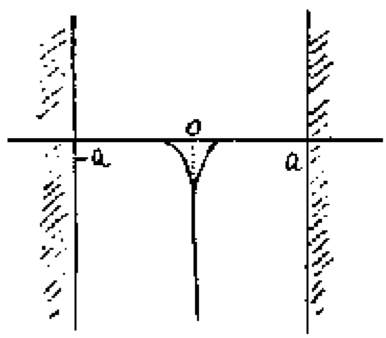
a) Si determini il valore di $\gamma>0$ per il quale l'autovalore più basso di H è $E=0$ e se ne scriva la ψ normalizzata

b) Si scrivano le equazioni che determinino gli altri autovalori

c) se $\psi(x,0) = N\left\{1-\frac{|x|}{a} + \operatorname{sen}\frac{\pi x}{a}\right\}$ dopo quanto tempo la particella torna allo stato iniziale? Se si fa una misura dell'energia quali risultati si possono ottenere e con quale probabilità;

---

1)



$$H = \frac{P^2}{2m} + V(x)$$

Dobbiamo risolvere $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi$

deve risultare $\psi(-a) = \psi(a) = 0$

perché la f.d.o. è nulla esternamente a $[-a,a]$ e così deve essere per continuità in $x=a$ e $x=-a$

Integriamo ora l'equazione di Schrödinger tra $-\varepsilon$ ed ε perché abbiamo una $\delta(x)$ centrata nell'origine.

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}\,dx + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx\, V(x)\psi(x) = E\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\psi(x)\,dx$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{d\psi}{dx}\right]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} -\frac{\hbar^2}{2m}\gamma\,\delta(x)\psi(x)\,dx = E\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\psi(x)\,dx$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{x=+\varepsilon} - \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{x=-\varepsilon}\right) - \frac{\hbar^2}{2m}\gamma\underbrace{\psi(0)}_{\text{proprietà della } \delta} = E\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\psi(x)\,dx$$

Eseguiamo ora il limite per $\varepsilon\to 0$ $\Rightarrow$ il 2° membro va a zero essendo la ψ continua e limitata

$$\psi'(\varepsilon) - \psi'(-\varepsilon) = -\gamma\psi(0)$$

discontinuità della derivata 1ª

$\Rightarrow E_n = \dfrac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2 m a^2}$

per quanto riguarda le f.d.onde risolvendo si ha $A = C = 0 \quad B = D$

$\Rightarrow \psi_1(x) = \psi_2(x) = B \sin kx$ $\quad \Rightarrow \psi(x) = B \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$ xché $ka = n$

normalizzando $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dx = \int_{-a}^{a} dx |B|^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = a|B|^2 = 1 \qquad |B| = \frac{1}{\sqrt{a}}$

$\Rightarrow \psi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\dfrac{n\pi x}{a}\right)$

OSSERVAZIONE! potevamo giungere più rapidamente a questo risultato osservando che ci troviamo in un segmento $[-a, a]$ che avrebbe (senza la presenza delle $\delta(x)$) le autofunzioni

$u_n^S(x) = \dfrac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\dfrac{n\pi x}{a}\right)$

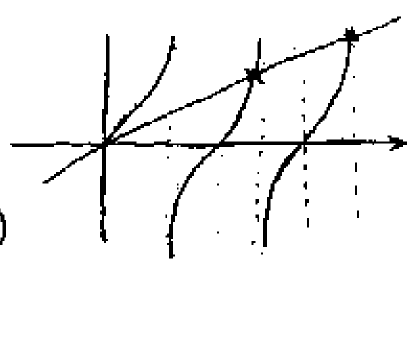
$u_n^A(x) = \dfrac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\dfrac{n\pi x}{a}\right)$

La presenza della $\delta(x)$ nell'origine si traduce in una discontinuità delle derivate prime $\left(\frac{d\psi_2}{dx}\right)' - \left(\frac{d\psi}{dx}\right) = -\gamma \psi(0)$ ora le soluzioni DISPARI soddisfano banalmente a questa condizione oltre che alle altre

$\Rightarrow \psi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\dfrac{n\pi x}{a}\right)$ con $E_n = \dfrac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ (N.B. x le dispari $\psi(0) =$

Mentre le soluzioni del tipo "coseno" non sono bene in quanto non soddisfano la condizione precedente, le soluzioni che soddisfano la condizione hanno autovalori che si ricavano dalla relazione $\dfrac{2k}{\gamma} = \tan ka$

che può essere risolta per via grafica



(al variare di γ varia pendenza della retta)

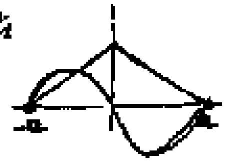
e) $\psi(x,0) = N\left\{1 - \frac{|x|}{a} + \operatorname{sen}\frac{\pi x}{a}\right\}$

Notiamo che questa è una combinazione di due autofunzioni e precisamente quelle relative ad $E_0 = 0$ ed $E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$

infatti essendo $\psi_0 = \sqrt{\frac{3}{2a}}\left(1 - \frac{|x|}{a}\right)$ $\qquad \psi_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{a}$ si ha

$$\psi(x,0) = N\left(\sqrt{\frac{2a}{3}}\,\psi_0 + \sqrt{a}\,\psi_1\right)$$

Grafico delle f.d.o. ψ_0 e ψ_1



$$\int_{-a}^{a}|\psi(x,0)|^2 dx = |N|^2\frac{2a}{3} + N^2 a = 1 \quad \Rightarrow \quad |N| = \sqrt{\frac{3}{5a}}$$

$$\Rightarrow \quad \psi(x,0) = \sqrt{\frac{2}{5}}\,\psi_0 + \sqrt{\frac{3}{5}}\,\psi_1$$

Se si esegue quindi una misura di energia in questo stato si possono ottenere i valori $E_0 = 0$ con probabilità $\frac{2}{5}$ ed il valore E_1 con probabilità $\frac{3}{5}$

$$\psi(x,t) = \sqrt{\frac{2}{5}}\,\psi_0 + \sqrt{\frac{3}{5}}\,e^{-iE_1 t/\hbar}\,\psi_1$$

Si torna allo stato iniziale $\psi(x,t) = \psi(x,0)$ tutte le volte che $e^{-iE_1 t/\hbar} = 1$ cioè tutte le volte che $E_1\frac{t}{\hbar} = 2k\pi$

Esercizio (Cassandro)

Una particella di massa m è vincolata a muoversi in una dimensione soggetta all'azione del potenziale

$$\begin{cases} V(x) = +\infty & \text{per } |x| \geq \frac{L}{2} \\ V(x) = 0 & \text{per } |x| < \frac{L}{2} \end{cases}$$

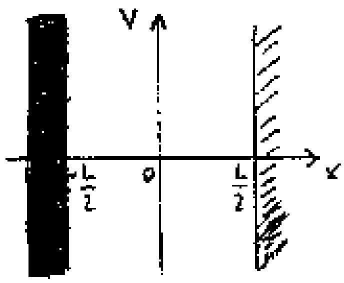
All'istante iniziale la funzione d'onda è

$$\psi(x,t=0) = \sqrt{\frac{2}{L}}\left(\cos\frac{\pi x}{L} - \cos\frac{3\pi x}{L}\right)\theta\left(x+\frac{L}{2}\right)\theta(-x)$$

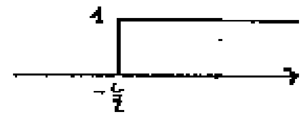
a) quali, fra i risultati possibili di una misura di energia hanno probabilità non nulla?

b) Determinare le probabilità dei primi tre valori dell'Hamiltoniano

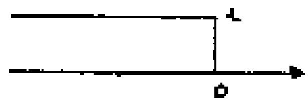
c) Supponendo che il sistema evolva liberamente, esiste un istante di tempo $t>0$ tale che in quell'istante la particella NON possa essere trovata nella metà sinistra del segmento, $x<0$? In caso affermativo quando questo si verifica per la prima volta?



$$\theta\left(x+\frac{L}{2}\right) = \begin{cases} 0 & x<-\frac{L}{2} \\ 1 & x>-\frac{L}{2} \end{cases}$$



$$\theta(-x) = \begin{cases} 0 & x>0 \\ 1 & x<0 \end{cases}$$



$|\psi(x,0)|^2 = 0$ per $x>0$ $\left(x<\frac{L}{2}\right)$ all'istante iniziale

mi aspetto che la ψ si sviluppi nel tempo

Di questo problema (particella libera su segmento $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$) conosciamo autovalori E_n ed autofunzioni $u_n(x)$ dell'energia. Essendo il potenziale simmetrico e lo spettro discreto e non degenere le autofunzioni u_n (del segmento) si dividono in simmetriche ed antisimmetriche

$$u_n^-(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \qquad E_n^- = \frac{(2n)^2\hbar^2\pi^2}{2mL^2} \quad \text{ANTISIMMETRICHE}$$

$$u_n^+(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left((2n+1)\frac{\pi x}{L}\right) \qquad E_n^+ = \frac{(2n+1)^2\hbar^2\pi^2}{2mL^2} \quad \text{SIMMETRICHE}$$

Allo stato iniziale E_n^+ E_n^- sono i possibili valori dell'energia che posso ottenere, nel nostro caso sono di meno infatti proiettando

$$\psi(x,0) = \sum_0^{\infty} {}_n \left(c_n^+ u_n^+(x) + c_n^- u_n^-(x) \right) \qquad \text{dove}$$

$$c_n^+ = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} u_n^+(x) \psi(x,0)\, dx \qquad c_n^- = \int_{-\frac{L}{2}}^{L/2} u_n^-(x)\, \psi(x,0)\, dx$$

N.B. sia le $u_n(x)$ che le $\psi(x,0)$ sono reali non ho quindi bisogno di ordinare le funzioni integrande.

$$c_n^+ = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sqrt{\frac{2}{L}} \left(\cos\frac{\pi x}{L} - \cos\frac{3\pi x}{L} \right) \theta(x+\tfrac{L}{2})\, \theta(-x) \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left((2n+1)\frac{\pi x}{L}\right) dx =$$

$$= \left(\text{N.B. uso le formule} \quad \begin{aligned} \cos a \sin b &= \tfrac{1}{2}\left(\sin(b+a) + \sin(b-a)\right) \\ \cos a \cos b &= \tfrac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right) \end{aligned} \right) =$$

$$= \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{0} \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{L} + (2n+1)\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{L} - (2n+1)\frac{\pi x}{L}\right) - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{3\pi x}{L} + (2n+1)\frac{\pi x}{L}\right) +$$

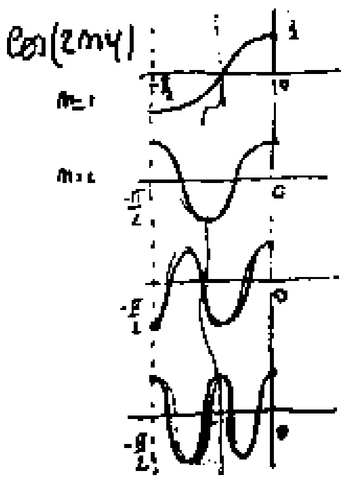
$$- \frac{1}{2}\cos\left(\frac{3\pi x}{L} - (2n+1)\frac{\pi x}{L}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{L} \left\{ \int_{-\frac{L}{2}}^{0} \cos\left((2n+2)\frac{\pi x}{L}\right) dx + \cos\left(2n\frac{\pi x}{L}\right) - \cos\left((2n+4)\frac{\pi x}{L}\right) - \cos\left((2n-2)\frac{\pi x}{L}\right) dx \right\} =$$

$$= \left(\text{cambio variabile} \quad \frac{\pi x}{L} = y \quad dx = \frac{L}{\pi} dy \quad 0 \to 0 \quad -\frac{L}{2} \to -\frac{\pi}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos((2n+2)y)\, dy + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos(2ny)\, dy - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos((2n+4)y)\, dy - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos((2n-2)y)\, dy \right\}$$

OSS: argomenti dei coseni sono tutti numeri pari



c_n^+ sono tutti zero tranne per $n=0$ ed $n=1$ per i quali il 2° ed il 4° integrale risultano $\neq 0$

Dunque

$$c_0^+ \neq 0 \quad c_1^+ \neq 0 \quad c_n^+ = 0 \quad n > 1$$

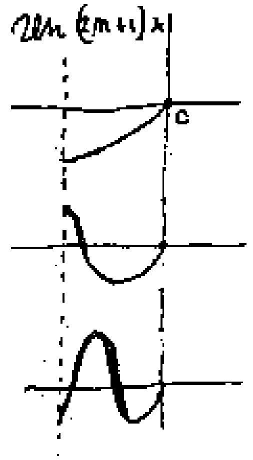
$$c_m^- = \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{0} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) - \cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{0} \sin\left((2m+1)\frac{\pi x}{L}\right) + \sin\left((2m-1)\frac{\pi x}{L}\right) - \sin\left((2m+3)\frac{\pi x}{L}\right) - \sin\left((2m-3)\frac{\pi x}{L}\right) dx =$$

$= \left(\text{cambio variabile } \frac{\pi x}{L} = y\right) =$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin((2m+1)y)\,dy + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin((2m-1)y)\,dy - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin((2m+3)y)\,dy - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin((2m-3)y)\,dy \right. \Rightarrow$$

<u>OSS.</u> argomento dei seni è del tipo $(2m+1)y$ e non esiste alcun m per cui questi integrali sono nulli in $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$



in definitiva quindi $\underline{c_m^- \neq 0 \ \forall m}$

Ordiniamo ora gli autovalori dati dalle espressioni E_m^+ E_m^- che sono numeri reali

E_0^- non ha senso perché la corrispondente autofunzione sarebbe identicamente nulla

$$E_0^+ = \frac{\hbar^2}{2mL^2} \quad E_1^+ = \frac{9\hbar^2}{2mL^2} \quad E_1^- = \frac{4\hbar^2}{2mL^2} \quad E_2^- = \frac{16\hbar^2}{2mL^2}$$

$\Rightarrow E_0^+ < E_1^- < E_1^+$ e pertanto la <u>f.d.o. al tempo $t=0$</u>

$$\psi(x,t=0) = c_0^+ u_0^+(x) + c_1^+ u_1^+(x) + \sum_{1}^{\infty} c_m^- u_m^-(x)$$

Per determinare la probabilità di ottenere i primi 3 valori di energia (E_0^+ E_1^- E_1^+ eseguendo una misura) devo prima assicurarmi che $\psi(x,0)$ di partenza sia normalizzata

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |\psi(x,0)|^2 dx = \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{0}\left(\cos\frac{\pi x}{L} - \cos\frac{3\pi x}{L}\right)^2 dx = N^2$$

$$\Rightarrow c_0^+ = \int_{-\frac{L}{2}}^{0} \psi(x,t=0)\, u_0^+(x)\, dx \qquad \text{e così via}$$

<u>le probabilità cercate sono $|c_0^+|^2, |c_1^-|^2, |c_1^+|^2$</u>

Avendo eseguito la corretta normalizzazione possiamo scrivere la $\psi(x,t)$ in termini degli autostati dell'energia

$$\psi(x,t) = c_0^+ \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\frac{\pi x}{L}\, e^{-iE_0^+\frac{t}{\hbar}} + c_1^+ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{L}} \cos\frac{3\pi x}{L}\, e^{-iE_1^+\frac{t}{\hbar}} + \sum_{1}^{\infty}{}_m\, c_m^- \sqrt{\frac{2}{L}}\, \mathrm{sen}\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) e^{-iE_m^-\frac{t}{\hbar}}$$

Conosciamo ora $\psi(x,t)$ con la condizione $\psi(x,0)=0 \quad \forall x>0$

ci chiediamo se $\exists$ un istante t^* per cui $\psi(x,t^*)=0 \quad \forall x<0$?

$$(\#)\quad c_0^+ u_0^+(x) + c_1^+ u_1^+(x) = -\sum_1^\infty{}_m c_m^- u_m^-(x) \qquad \text{per } x>0$$

Vogliamo vedere se esiste un istante t^* tale che per $x<0$ si abbia

$$c_0^+ u_0^+(x)\, e^{-iE_0^+\frac{t^*}{\hbar}} + c_1^+ u_1^+(x)\, e^{-iE_1^+\frac{t^*}{\hbar}} = -\sum_m^\infty c_m^- u_m^-(x)\, e^{-iE_m^-\frac{t^*}{\hbar}} \qquad x<0$$

cioè (tirando fuori un fattore di fase)

$$c_0^+ u_0^+(x) + c_1^+ u_1^+\, e^{-i(E_1^+-E_0^+)\frac{t^*}{\hbar}} = -\sum_1^\infty{}_m c_m^- u_m^-(x)\, e^{-i(E_m^--E_0^+)\frac{t^*}{\hbar}} \qquad x<0$$

ora $x<0 \Rightarrow$ sostituisco $-|x|$ e tengo conto che $u_0^+\, u_1^+$ sono PARI mentre le u_m^- sono dispari

$$(*)\quad c_0^+ u_0^+(|x|) + c_1^+ u_1^+(|x|)\, e^{-i(E_1^+-E_0^+)\frac{t^*}{\hbar}} = +\sum_1^\infty{}_m c_m^- u_m^-(|x|)\, e^{-i(E_m^--E_0^+)t^*/\hbar} \qquad |x|>0$$

ora l'istante di tempo t^* cercato è quello che rende uguali le espressioni $(*)$ e $(\#)$

ciò si verifica se

$$\left(e^{-i(E_1^+-E_0^+)\frac{t^*}{\hbar}}\right) = 1 \qquad \text{e} \qquad \left(e^{-i(E_m^--E_0^+)t^*/\hbar}\right) = -1$$

cioè se
$$\begin{cases} (E_1^+-E_0^+)\dfrac{t^*}{\hbar} = 2k\pi \\ (E_m^--E_0^+)\dfrac{t^*}{\hbar} = (2\tilde{k}+1)\pi \end{cases} \qquad k,\tilde{k} \text{ interi}$$

ora $E_0^+ = \dfrac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} \qquad E_1^+ = \dfrac{9\hbar^2\pi^2}{2mL^2} \qquad E_m^- = \dfrac{(2m)^2\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{8\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\dfrac{t^*}{\hbar} = 2k\pi \\ \dfrac{[(2m)^2-1]\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\dfrac{t^*}{\hbar} = (2\tilde{K}+1)\pi \end{cases} \qquad \text{poniamo } a = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2\hbar}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8\Omega t^* = 2k\pi \\ \left[(2n)^2-1\right]\Omega t^* = (2\tilde{k}+1)\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^* = \dfrac{2k\pi}{8\Omega} \\ \left[(2n)^2-1\right]\Omega \dfrac{2k\pi}{8\Omega} = (2\tilde{k}+1)\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[(2n)^2-1\right]\frac{k}{4} = (2\tilde{k}+1)$$

ora $(2n)^2-1$ è dispari come $2\tilde{k}+1$

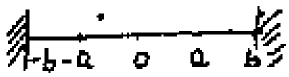
quindi necessariamente k deve essere 4 oppure un multiplo DISPARI di 4

Il primo k buono è quindi 4

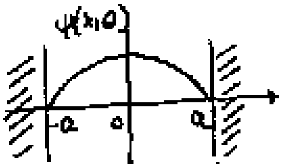
$$\Rightarrow t^* = \frac{\pi}{\Omega} = \frac{\pi\, 2ml^2\hbar}{\pi^2\hbar^2} = \frac{2ml^2}{\pi\hbar}$$

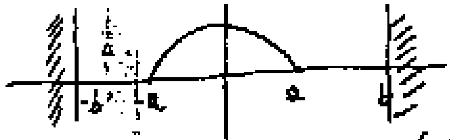
Esercizio

* Una particella di massa m si trova nello stato fondamentale in un segmento $[-a, a]$. Istantaneamente i lati della scatola si allargano fino a $\pm b$



Quale è la probabilità di trovare la particella nello stato fondamentale del NUOVO potenziale sapendo che lo stato iniziale era descritto dalla f.d.o.: $\psi(x,0) = \sqrt{\frac{1}{a}} \cos\frac{\pi x}{2a} \quad |x|<a$





$\psi_b(x,0^+)$

Sia $\psi_b(x,0^+)$ lo stato iniziale per la NUOVA BUCA (un istante dopo l'allargamento)

$$\psi_b(x,0^+) = \begin{cases} 0 & -b<x<-a \\ \sqrt{\frac{1}{a}}\cos\frac{\pi x}{2a} & |x|<a \\ 0 & a<x<b \end{cases}$$

Bisogna esprimere $\psi_b(x,0^+)$ come combinazione lineare di autofunzioni della nuova buca.

N.B. le autofunzioni della buca $[-b, b]$ sono pari e dispari ma $\psi_b(x,0^+)$ è PARI e pertanto $\psi_b(x,0^+)$ sarà solo combinazione di autofunzioni pari $\psi^+_{bn}(x)$

$$\Rightarrow \psi_b(x,0^+) = \sum_0^{\infty} {}_n\, c^+_n \psi^+_{bn}(x) \quad \text{con} \quad c^+_n = \langle \psi^+_{bn}(x) | \psi_b(x,0^+) \rangle$$

Ma $\psi_b(x,0^+)$ è normalizzata $\Rightarrow P(E=E_0) = |c^+_0|^2$
energia dello stato fondamentale

$$c^+_0 = \int_{-b}^{b} \psi^+_{b0}(x)\, \psi_b(x,0^+)\, dx = \int_{-a}^{a} \frac{1}{\sqrt{b}} \cos\left(\frac{\pi x}{2b}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{ab}} \int_{-a}^{a} \left[\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{2b} + \frac{\pi x}{2a}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{2b} - \frac{\pi x}{2a}\right)\right] dx = \frac{1}{\sqrt{ab}} \int_0^a \cos\left(\frac{b+a}{2ab}\pi x\right) + \cos\left(\frac{b-a}{2ab}\pi x\right) dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{ab}} \int_0^{\frac{\pi(b+a)}{2b}} \frac{2ab}{\pi(b+a)} \cos y\, dy + \frac{1}{\sqrt{ab}} \int_0^{\frac{\pi(b-a)}{2b}} \cos y\, dy =$$

$$= \frac{2\sqrt{ab}}{\pi(b+a)} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi(b+a)}{2b}\right) + \frac{2\sqrt{ab}}{\pi(b-a)} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi(b-a)}{2b}\right)$$

$$\Rightarrow P(E=E_0) = |c_0|^2 = \frac{4ab}{\pi^2} \left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi(b+a)}{2b}\right)}{(b+a)} + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi(b-a)}{2b}\right)}{(b-a)} \right)^2$$

$$\Rightarrow J\left(\frac{L}{2},0\right)=\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi\left(\frac{L}{2},0\right)\frac{d\psi^*}{dx}\Big|_{x=\frac{L}{2}}-\psi^*\left(\frac{L}{2},0\right)\frac{d\psi}{dx}\Big|_{x=\frac{L}{2}}\right)=$$

$$=\frac{i\hbar}{2m}\left(-\frac{\sqrt{3}\pi}{L^2}e^{-i\varphi}+\frac{\sqrt{3}\pi}{L^2}e^{i\varphi}\right)=-\frac{\hbar}{m}\frac{\sqrt{3}\pi}{L^2}\left(\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}\right)$$

$$\Rightarrow J\left(\frac{L}{2},0\right)=-\frac{\hbar}{L^2 m}\sqrt{3}\pi\sin\varphi$$ max e pozitiv pt $\sin\varphi=-1$

$$\Rightarrow \varphi=\frac{3}{2}\pi \qquad \Rightarrow e^{i\frac{3}{2}\pi}=-i$$

$$\Rightarrow \psi(x,0)=\sqrt{\frac{3}{4}}\psi_1(x)-\frac{i}{2}\psi_2(x)$$

b) $\psi(x,t)=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2L}}\sin\frac{\pi x}{L}e^{-iE_1\frac{t}{\hbar}}-\frac{i}{\sqrt{2L}}\sin\frac{2\pi x}{L}e^{-iE_2 t/\hbar}=$

$$=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2L}}\sin\frac{\pi x}{L}-\frac{i}{\sqrt{2L}}\sin\frac{2\pi x}{L}e^{-i(E_2-E_1)\frac{t}{\hbar}}$$

$$\langle\psi(t)|x|\psi(t)\rangle=\int_0^L x|\psi(x,t)|^2dx=\int_0^L x\,\psi(x,t)\psi^*(x,t)\,dx=$$

$$=\int_0^L x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi x}{L}+\frac{i}{2}\sin\frac{2\pi x}{L}e^{i(E_2-E_1)\frac{t}{\hbar}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi x}{L}-\frac{i}{2}\sin\frac{2\pi x}{L}e^{-i(E_2-E_1)t/\hbar}\right)dx=$$

$$=\int_0^L x\left[\frac{3}{4}\left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)^2-i\frac{\sqrt{3}}{4}\sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{2\pi x}{L}e^{-i(E_2-E_1)\frac{t}{\hbar}}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{2\pi x}{L}e^{i(E_2-E_1)t/\hbar}+\frac{1}{4}\left(\sin\frac{2\pi x}{L}\right)^2\right]dx$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^L x\left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)^2-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left[(E_2-E_1)\frac{t}{\hbar}\right]\int_0^L\sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{2\pi x}{L}dx+\frac{1}{4}\int_0^L\sin\frac{2\pi x}{L}dx=$$

$$\frac{\pi x}{L}=y \qquad dx=\frac{L}{\pi}dy \qquad L\to\pi \qquad 0\to 0$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^\pi\frac{L^2}{\pi^2}\sin^2y\,dy-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left((E_2-E_1)\frac{t}{\hbar}\right)\int_0^\pi\frac{L}{\pi}\sin y\sin 2y\,dy+\frac{1}{4}\int_0^L\frac{L}{\pi}\sin 2y\,dy$$

Esercizio

Una particella di massa m si muove di moto unidimensionale ed è soggetta al potenziale

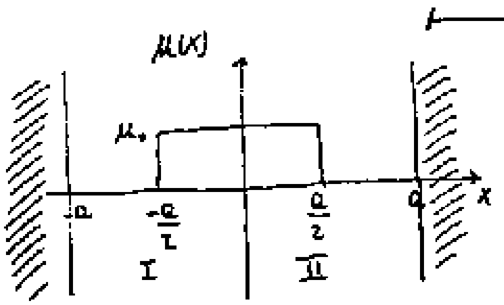
$$U(x) = \begin{cases} U_0 & 0 \le x \le \frac{a}{2} \\ 0 & \frac{a}{2} < x < a \\ +\infty & x > a \end{cases}$$

con la condizione di simmetria $U(-x) = U(x)$.

a) Per quale valore di U_0 si ha che il livello fondamentale dell'Hamiltoniana abbia energia $E_0 = U_0$

b) Scrivere la relativa f.d.o. normalizzata

c) Se ad un determinato istante $U_0 \to 0$ quale è la probabilità che facendo una misura dell'energia ad istanti successivi si trovi ancora il valore U_0 se lo stato iniziale era quello precedentemente trovato?



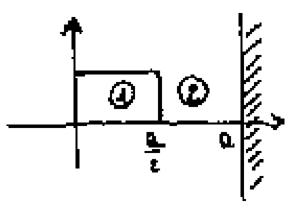
L'equazione da risolvere è

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + U(x)\psi = E\psi$$

Il potenziale è pari, lo spettro è discreto $\Rightarrow$ le autofunzioni saranno quindi pari o dispari $\Rightarrow$ le autofunzioni dell'energia saranno anche autofunzioni della parità.

Cerco il livello fondamentale (che non deve avere nodi) sapendo che la f.d.o dello stato fondamentale è una pari (xché l'hamiltoniana è pari)

A causa della simmetria di $U(x)$ STUDIO LA ZONA DI DESTRA



Imponendo condizione $E = U_0$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\psi_1}{dx^2} = 0 \\ \dfrac{d^2\psi_2}{dx^2} = -\dfrac{2mU_0}{\hbar^2}\psi_2 \end{cases}$$

sia $k^2 = \dfrac{2mU_0}{\hbar^2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \psi_1(x) = A + Bx \\ \psi_2(x) = Ce^{-ikx} + De^{ikx} \end{cases}$$

che possiamo riscrivere

$$\begin{cases} \psi_1(x) = A + Bx \\ \psi_2(x) = \tilde{C}\cos kx + \tilde{D}\sin kx \end{cases}$$

Sto cercando una f.d.o. pari che sia continua nell'origine assieme alla sua derivata $\Rightarrow$ necessariamente $B=0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \psi_1(x) = A \\ \psi_2(x) = C\cos kx + D\,\mathrm{sen}\,kx \end{cases}$$ avendo posto per comodità di notazione $C=\tilde{C}$ e $D=\tilde{D}$.

le condizioni al contorno sono
$$\begin{cases} \psi_1\left(\frac{a}{2}\right) = \psi_2\left(\frac{a}{2}\right) \\ \psi_2(a) = 0 & \text{la f.d.o è zero per } x>a \text{ quindi è zero per continuità anche in } a \\ \psi_1'\left(\frac{a}{2}\right) = \psi_2'(a/2) \end{cases}$$

imponendo condizioni si arriva al sistema lineare omogeneo 3×3 nelle incognite A, C, D
$$\begin{cases} A - C\cos k\frac{a}{2} - D\,\mathrm{sen}\,k\frac{a}{2} = 0 \\ C\cos ka + D\,\mathrm{sen}\,ka = 0 \\ -C\,\mathrm{sen}\,k\frac{a}{2} + D\cos k\frac{a}{2} = 0 \end{cases}$$
tale sistema ha soluzione non banale $\Leftrightarrow$ il determinante della matrice dei coefficienti è nullo

$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} 1 & -\cos k\frac{a}{2} & -\mathrm{sen}\,k\frac{a}{2} \\ 0 & \cos ka & \mathrm{sen}\,ka \\ 0 & -\mathrm{sen}\,k\frac{a}{2} & \cos k\frac{a}{2} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \cos ka\cos k\frac{a}{2} + \mathrm{sen}\,k\frac{a}{2}\,\mathrm{sen}\,ka = 0$$ usando formule addizione e sottrazione

$$\Rightarrow \cos\left(ka - k\frac{a}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \cos\left(k\frac{a}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow k\frac{a}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

$$\Rightarrow k = \frac{2}{a}\left(\frac{\pi + 2n\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{a}(2n+1)$$ poichè ora $k^2 = \frac{2m\mu_0}{\hbar^2}$

$$\Rightarrow \frac{2m\mu_0}{\hbar^2} = \frac{\pi^2}{a^2}(2n+1)^2 \quad \Rightarrow \boxed{\mu_{0n} = \frac{\pi^2\hbar^2}{a^2}\frac{(2n+1)^2}{2m}}$$

si ha inoltre $\mathrm{sen}\,\frac{ka}{2} = (-1)^n$ (poiché $\cos\frac{ka}{2} = 0$)

$$\Rightarrow \begin{cases} A = (-1)^n D & \Rightarrow D = (-1)^n A \\ -C(-1)^n = 0 & \Rightarrow C = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ le funzioni d'onda corrispondenti ai valori μ_{0n}, che descrivono lo stato con energia $E = \mu_{0n}$ sono

$$\psi_n(x) = \begin{cases} A & |x| < \frac{a}{2} \\ (-1)^n A\,\mathrm{sen}\left[(2n+1)\frac{\pi}{a}x\right] & \frac{a}{2} < x < a \\ (-1)^{n+1}\mathrm{sen}\left[(2n+1)\frac{\pi}{a}x\right] & -a < x < -\frac{a}{2} \end{cases}$$

A CAUSA DELLA PARITÀ

Per selezionare tra le $\psi_n(x)$ quella che descrive lo stato fondamentale basta osservare che la f.d.o. dello stato fondamentale NON HA NODI cioè non si annulla all'interno dell'intervallo $[\frac{a}{2}, a]$

Poiché per l'argomento del seno si ha $\underset{x=\frac{a}{2}}{\frac{\pi}{2}(2n+1)} \le \frac{\pi}{a}x(2n+1) \le \underset{x=a}{\pi(2n+1)}$

$[\frac{\pi}{2}, \pi]$

solo per $n=0$ la $\psi(x)$ non si annulla in $[+\frac{a}{2}, a]$ estremi esclusi

infatti $n=1 \Rightarrow$ argomento del seno $\in [\frac{3}{2}\pi, 3\pi]$

$\Rightarrow$ il valore di U_0 richiesto è pertanto

$$\boxed{U_0 = U_{0\,(n=0)} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}}$$

$\Rightarrow$ lo stato fondamentale è descritto da
$$\psi_0(x) = \begin{cases} A & |x| \le a \\ A \sin\frac{\pi x}{a} & \frac{a}{2} \le x \le a \\ -A \sin\frac{\pi}{a}x & -a \le x \le -\frac{a}{2} \end{cases}$$

Normalizzazione

$$1 = \int_{-a}^{a} |\psi_0(x)|^2 dx = 2\int_0^a |\psi_0(x)|^2 dx = \begin{pmatrix}\text{x che } \psi_0(x) \text{ è pari} \\ \text{in } [-a, a]\end{pmatrix}$$

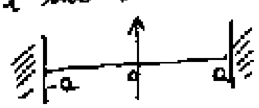
$$= 2\int_0^{a/2} A^2 dx + 2\int_{a/2}^{a} A^2 \sin^2\frac{\pi x}{a} dx = aA^2 + 2\frac{a}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} A^2 \sin^2 y \, dy =$$

$$= aA^2 + \frac{2aA^2}{\pi}\left[\frac{y}{2} - \frac{\sin 2y}{4}\right]_{\pi/2}^{\pi} = aA^2 + aA^2 - a\frac{A^2}{2} = \frac{3a}{2}A^2$$

$$\Rightarrow \quad A^2 = \frac{2}{3a} \qquad A = \sqrt{\frac{2}{3a}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\psi_0(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{3a}} & |x| \le a \\ \sqrt{\frac{2}{3a}} \sin\frac{\pi |x|}{a} & -a < x < -\frac{a}{2} \quad \frac{a}{2} < x < a \end{cases}}$$

c) prima di rispondere alla 3ª domanda verifichiamo se $U_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ è un autostato dell'energia per la particella in $[-a, a]$ avendo mandato a zero le barriere



per questa buca $\quad E_n^+ = \frac{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \qquad E_n^- = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$

se fosse $u_0 \neq E_n^{\pm}$ $\forall n$ allora potremo subito affermare che la probabilità richiesta è NULLA a priori

osserviamo però che $u_0 = E_1^-$

$$\Rightarrow \quad P(E = u_0 = E_1^-) = \underbrace{\int_{-a}^{a} \underset{\text{PARI}}{\psi_0(x)}\, \underset{\text{DISPARI}}{\psi_1^-(x)}}_{\text{DISPARI}} = 0$$

- **REM:** Per l'energia e per le osservabili che commutano con H la probabilità non dipende dal tempo

Esercizio (FALCIONI)

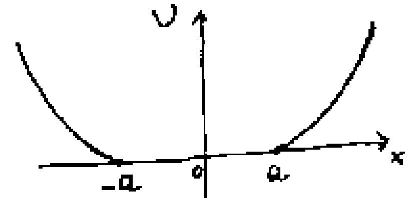
Una particella di massa m si muove di moto unidimensionale, soggetta al potenziale $U(x)$.

$$U(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < a \\ \frac{1}{2} m\omega^2 (x-a)^2 & x > a \\ U(x) = U(-x) & \text{(simmetria)} \end{cases}$$

a) Spiegare qualitativamente perché l'energia dello stato fondamentale di questa Hamiltoniana soddisfa la relazione $0 < E_0 < \frac{1}{2}\hbar\omega$

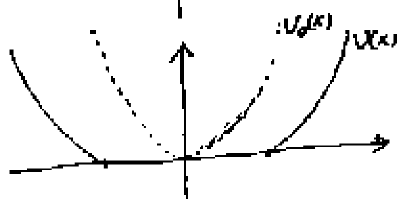
b) Per quali valori di $a > 0$ uno degli autovalori dell'operatore hamiltoniano è uguale a $\frac{1}{2}\hbar\omega$?

c) Scriverne quindi la f.d.o. normalizzata



$$H = \frac{P^2}{2m} + U(x)$$

Consideriamo $H_0 = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 = \frac{P^2}{2m} + U_0(x)$



dove $U_0(x)$ rappresenta il potenziale dell'oscillatore armonico semplice

Si vede subito che $U(x) < U_0(x) \quad \forall x$

Calcoliamo ora $\langle H \rangle$ su un qualsiasi stato $\langle H \rangle = \langle \frac{P^2}{2m} \rangle + \langle U \rangle$

poiché ora $U(x) < U_0(x) \Rightarrow \underset{\text{MINORE}}{\langle U \rangle < \langle U_0 \rangle}$ su qualunque funzione

$$\Rightarrow \langle H \rangle = \langle \frac{P^2}{2m} \rangle + \langle U \rangle < \langle \frac{P^2}{2m} \rangle + \langle U_0 \rangle = \langle H_0 \rangle \quad \Rightarrow \quad \boxed{\langle H \rangle < \langle H_0 \rangle}$$

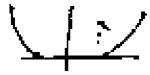
dove H_0 è l'hamiltoniana del semplice oscillatore

Sia ora ψ_0 autofunzione di H_0 corrispondente al livello fondamentale

$$H_0 \psi_0 = E_0 \psi_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega \psi_0$$

ora la relazione $\langle H \rangle < \langle H_0 \rangle$ vale su qualsiasi stato ed in particolare vale per $|\psi_0\rangle$

$$\Rightarrow \langle \psi_0 | H | \psi_0 \rangle < \langle \psi_0 | H_0 | \psi_0 \rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega$$

Inoltre se E_0 è l'energia dello stato fondamentale di 

necessariamente $\underbrace{\langle H \rangle}_{\text{valor medio dell'energia}} \geqslant E_0$ ↳ stato fond.

$$\Rightarrow \begin{cases} \langle H \rangle \geqslant E_0 \\ \langle H \rangle < \frac{1}{2}\hbar\omega \end{cases} \Rightarrow E_0 \leq \langle H \rangle < \frac{1}{2}\hbar\omega \Rightarrow \boxed{E_0 < \frac{1}{2}\hbar\omega}$$

Mostriamo ora che $E_0 > 0$

per farlo mostriamo che NON è possibile avere $\langle H \rangle = 0$

ora $\langle H \rangle = \underbrace{\left\langle \frac{P^2}{2m} \right\rangle}_{\geqslant 0} + \underbrace{\langle U(x) \rangle}_{\geqslant 0 \text{ perchè } U(x) \geqslant 0} \geqslant 0 \qquad \Rightarrow \langle H \rangle \geqslant 0$

il valor medio del quadrato di un operatore hermitiano è sicuramente $\geqslant 0$

Supponiamo che esista almeno uno stato per cui si abbia $\langle H \rangle = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \langle P^2 \rangle = 0 & (1) \\ \langle U(x) \rangle = 0 & (2) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow \quad \Delta P = \sqrt{\langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2} = 0$ (sarebbe $\Delta P = \sqrt{-\langle P \rangle^2}$ ma p è un'osservabile per cui Δp deve essere reale $\Rightarrow$ assurdo

$(2) \Rightarrow \quad 0 = \langle U(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 U(x)\, dx = 0$

ora $U(x) \neq 0$ per $x > a$ $\; x < -a$

$\Rightarrow \psi(x) \neq 0 \quad |x| < a$

$\Rightarrow \Delta X = \text{costante} < \infty$

Uno stato con $\Delta p = 0$ e $\Delta X = \text{costante}$ non può esistere visto il principio di indeterminazione perchè $\Delta x \, \Delta p = 0$

$\Rightarrow$ Non esiste nessuno stato che con questa hamiltoniana abbia valor medio di $H = 0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{0 < E_0 < \frac{1}{2}\hbar\omega}$$

b) $$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi$$

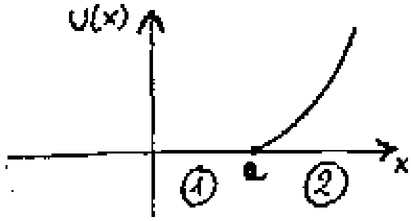
L'Hamiltoniana è simmetrica, lo spettro è discreto non degenere ⇒ necessariamente le autofunzioni dell'energia si divideranno in PARI e DISPARI

(lo spettro è non degenere quando ad ogni autofunzione corrisponde un solo autovalore)

Questo deriva dal fatto che H commuta con la parità $\mathbb{P}$.

STUDIO QUINDI LA SOLA ZONA DI DESTRA

(Autovalore di $\mathbb{P}$) = −1 AUTOFUNZIONI ANTISIMMETRICHE



$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_1}{dx} = E\psi_1 \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_2}{dx} + \frac{1}{2}m\omega^2(x-a)^2\psi_2 = E\psi_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2\psi_1}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi_1 \\ \frac{d^2\psi_2}{dx^2} = \frac{m^2(x-a)^2\omega^2}{\hbar^2}\psi_2 - \frac{2mE}{\hbar^2}\psi_2 \end{cases}$$

fissiamo quindi il valore di E
$$E = \frac{1}{2}\hbar\omega$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2\psi_1}{dx^2} = -\frac{m\omega}{\hbar}\psi_1 \\ \frac{d^2\psi_2}{dx^2} + \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}(x-a)^2\psi_2 \cancel{=} -\frac{m\omega}{\hbar}\psi_2 \end{cases}$$

poniamo ora $k = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2\psi_1}{dx^2} = -k^2\psi_1 \\ \frac{d^2\psi_2}{dx^2} + k^4(x-a)^2\psi_2 \cancel{=} -k^2\psi_2 \end{cases}$$

consideriamo l'equazione nell'incognita $\psi_1(x)$

$$\Rightarrow \psi_1(x) = \alpha e^{-ikx} + \beta e^{ikx} = A \operatorname{sen} kx + \tilde{A}\cos kx$$

Poiché stiamo considerando funzioni antisimmetriche e $\psi_1(x)$ appartiene alla 1ª zona ⇒ necessariamente $\tilde{A} = 0$ (deve essere $\psi_1(0) = 0$)

$$\Rightarrow \psi_1(x) = A \operatorname{sen} kx$$

occupiamoci ora della 2ª equazione

Sappiamo che l'hamiltoniana di un oscillatore normale

è $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$

l'equazione che ne descrive gli stati stazionari è

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi(x)=E_n\psi(x) \qquad \text{dove } E_n=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}-\frac{m^2\omega^2x^2}{\hbar^2}\psi(x)=-2\frac{m}{\hbar^2}\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)\psi(x) \qquad \text{sia ora } k=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}-k^4x^2\psi(x)=-2k^2\left(n+\frac{1}{2}\right)\psi(x)$$

per un dato n la soluzione di tale equazione è

$$\psi_n(x)=B\,e^{-\frac{1}{2}k^2x^2}H_n(kx)$$

ora la nostra equazione per la 2° zona è

$$\frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2}-k^4(x-a)^2\psi(x)=-k^2\psi(x)$$

analoga alla precedente in cui $n=0$ ed in cui l'oscillatore è centrato in $x=a$

$$\Rightarrow \psi_2(x)=B\,e^{-\frac{1}{2}k^2(x-a)^2}H_0(kx)=B\,e^{-\frac{1}{2}k^2(x-a)^2}$$

essendo B un opportuno fattore di normalizzazione

Ricapitolando per le soluzioni dispari si ha

$$\begin{cases}\psi_1(x)=A\,\text{sen}\,kx & 0<x<a\\ \psi_2(x)=B\,e^{-\frac{1}{2}k^2(x-a)^2} & x>a\end{cases} \qquad \text{con } k=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

le condizioni al contorno sono $\psi_1(a)=\psi_2(a)$ $\quad\psi_1'(a)=\psi_2'(a)$

$$\Rightarrow \begin{cases}A\,\text{sen}\,ka=B\\ A\cos ka=0\end{cases} \Rightarrow \cos ka=0 \Rightarrow ka=\frac{\pi}{2}+n\pi=\frac{\pi}{2}(2n+1)$$

$$\Rightarrow \boxed{a=\frac{\pi}{2k}(2n+1)}$$

determiniamo ora i coefficienti

$$\cos ka=0 \Rightarrow \text{sen}\,ka=(-1)^n \Rightarrow A(-1)^n=B$$

$$\Rightarrow \psi_n^A(x)=\left\{\underset{0<x<a}{A\,\text{sen}\,kx}\ ;\ \underset{x>a}{(-1)^nA\exp\left(-\frac{1}{2}k^2(x-a)^2\right)}\right\} \quad \text{con } \psi_n^A(-x)=-\psi_n^A(x)$$

N.B. l'ultima condizione è necessaria perchè l'antisimmetria è immediata per il seno, ma devo dire come è il 2° pezzo per $x<-a$

In sostanza otteniamo il seguente risultato

$$\psi_m^A(x) = \begin{cases} A \operatorname{sen} kx & |x|<a \\ (-1)^m A\, e^{-\frac{1}{2}k^2(x-a)^2} & x>a \\ (-1)^{m+1} A\, e^{-\frac{1}{2}k^2(x-a)^2} & x<-a \end{cases}$$

A si determina in base alla condizione di normalizzazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_m^A(x)|^2 dx = 2\int_0^{+\infty} |\psi_m^A(x)|^2 dx = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} |\psi_m^A(x)|^2 dx = |A|^2 \int_0^a \operatorname{sen}^2 kx\, dx + |A|^2 \int_a^{+\infty} e^{-k^2(x-a)^2} dx =$$

$$= |A|^2 \left\{ \int_0^{ka} \frac{1}{k} \operatorname{sen}^2 y\, dy + \int_0^{\infty} e^{-k^2y^2} dy \right\} =$$

avendo sostituito $kx = y$ nel 1° integrale e $x-a=y$ nel 2°

$$= |A|^2 \left\{ \frac{1}{k}\left[\frac{y}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2y}{4}\right]_0^{ka} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k^2}} \right\} =$$

avendo tenuto conto che

1) $\int \operatorname{sen}^2 y\, dy = \frac{y - \operatorname{sen} y \cos y}{2}$ + costante

2) $\cos ka = 0$

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

$$= |A|^2 \left\{ \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2k} \right\} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |A|^2 \left(\frac{ka + \sqrt{\pi}}{k} \right) = 1$$

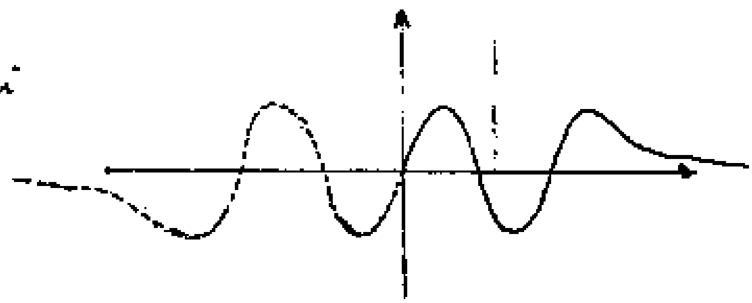
$$\Rightarrow \boxed{A = \sqrt{\frac{k}{ka + \sqrt{\pi}}}}$$

ora però essendo $a = (2m+1)\frac{\pi}{2k}$

$$\Rightarrow \boxed{A_m = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{(2m+1)\frac{\pi}{2} + \sqrt{\pi}}}}$$

N.B. Per ogni valore di a ho una diversa hamiltoniana, poiché l'autostato di tutte queste hamiltoniane è $\frac{1}{2}\hbar\omega$ e poiché abbiamo in precedenza mostrato che lo stato fondamentale E_0 ha energia $< \frac{1}{2}\hbar\omega \Rightarrow$ Questi che abbiamo trovato sono TUTTI STATI ECCITATI.

L'andamento delle soluzioni dispari sarà pertanto il seguente



(Autovalore di $\mathbb{P}$) $= +1$ SOLUZIONI SIMMETRICHE

Con ragionamenti analoghi si arriva a

$$\begin{cases} \psi_1(x) = A\cos kx & 0<x<a \\ \psi_2(x) = B\,e^{-\frac{1}{2}k^2(x-a)^2} & x>a \end{cases}$$

Imponendo condizioni di continuità della funzione e delle sue derivate in $x=a$ si ottengono le seguenti relazioni

$$\begin{cases} -Ak\,\mathrm{sen}\,ka = 0 \\ A\cos ka = B \end{cases} \Rightarrow \mathrm{sen}\,ka = 0 \Rightarrow ka = n\pi \text{ con } n\neq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{n\pi}{k}}$$

Inoltre si ottiene la relazione $B = (-1)^n A$

Calcolo del fattore di normalizzazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n^S(x)|^2 dx = 2\int_0^{\infty} |\psi_n^S(x)|^2 dx = 2|A_n|^2\left(\int_0^a \cos^2 kx\,dx + \int_a^{+\infty} e^{-k^2(x-a)^2} dx\right) =$$

$$= 2|A_n|^2\left\{\frac{1}{k}\int_0^{ka} \cos^2 y\,dy + \int_0^{\infty} e^{-k^2y^2} dy\right\} =$$

$$= 2|A_n|^2\left\{\frac{1}{k}\left[\frac{y}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{sen}\,y\cos y\right]_0^{ka} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{k}\right\} = \qquad \text{N.B. } \mathrm{sen}\,ka = 0$$

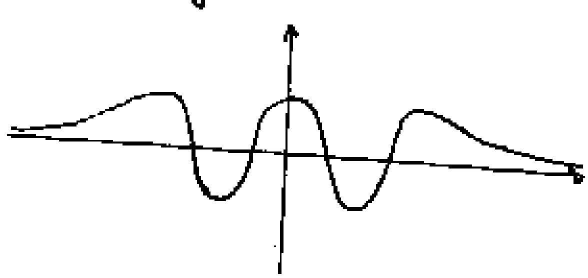
$$= 2|A_n|^2\left(\frac{1}{k}\left[\frac{ka}{2}\right] + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{k}\right) =$$

$$= 2|A_n|^2\left(\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{k}\right) = 1$$

$$\Rightarrow |A_n|^2\left(\frac{ka+\sqrt{\pi}}{k}\right) = 1 \Rightarrow A_n = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{ka+\sqrt{\pi}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{A_n = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n\pi+\sqrt{\pi}}}} \Rightarrow \psi_n^S(x) = \begin{cases} A_n\cos kx & |x|<a \\ (-1)^n A_n\,e^{-\frac{1}{2}k^2(x-a)^2} & |x|>a \end{cases}$$

L'andamento qualitativo delle soluzioni simmetriche sarà pertanto



Otteniamo quindi per i possibili valori di a

$$a_n^S = \frac{n\pi}{k} = \frac{2n\pi}{2k}$$

$$a_n^A = \frac{(2n+1)}{k}\frac{\pi}{2}$$

Quindi in sostanza $a_N = \frac{N\pi}{2k}$ $\begin{cases} N \text{ dispari} & \text{soluzioni antisimmetriche} \\ N \text{ pari} & \text{soluzioni simmetriche} \end{cases}$

$$\Rightarrow A_N = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{N\frac{\pi}{2} + \sqrt{\pi}}}$$

Fissato quindi un certo valore di N ⇒ ho fissato un certo operatore H ed in conseguenza un certo stato (che abbiamo visto in precedenza essere eccitato) Come fare a sapere di quale stato eccitato si tratta?

E' necessario studiare il numero di nodi delle corrispondenti funzioni d'onda.

Ora in generale se H è unidimensionale e lo spettro è discreto

0 NODI STATO FONDAMENTALE
1 NODO 1° STATO ECCITATO
2 NODI 2° STATO ECCITATO

Nel nostro problema il numero di nodi dipende dall'intervallo $[-a, a]$ in cui la funzione è di tipo sinusoidale (non potendosi ovviamente annullare l'esponenziale)

la relazione che ci interessa è $k a_N = N\frac{\pi}{2}$

Poniamo N=1 e vediamo quanti nodi abbiamo in $[-a_N, a_N]$

$N=1 \Rightarrow$ soluzioni dispari $\Rightarrow a_1 = \frac{\pi}{2k}$ ora $\sin kx = 0 \Rightarrow x = n\frac{\pi}{k}$

$\Rightarrow$ all'interno di $\left[-\frac{1}{2}\frac{\pi}{k}, \frac{1}{2}\frac{\pi}{k}\right]$ si ha un solo NODO se $x=0$

$N=2 \Rightarrow$ soluzioni pari $\Rightarrow a_2 = \frac{\pi}{k}$ ora $\cos kx = 0$ $x = \frac{\pi}{k}\left(\frac{1}{2} \pm n\right)$

$\Rightarrow$ all'interno di $\left[-\frac{\pi}{k}, \frac{\pi}{k}\right]$ si hanno 2 NODI per $x = -\frac{\pi}{2k}$ $x = \frac{\pi}{2k}$

e così via

Concludiamo quindi che N è il grado di eccitazione dello stato

$N = 1 \Rightarrow 1°$ livello eccitato

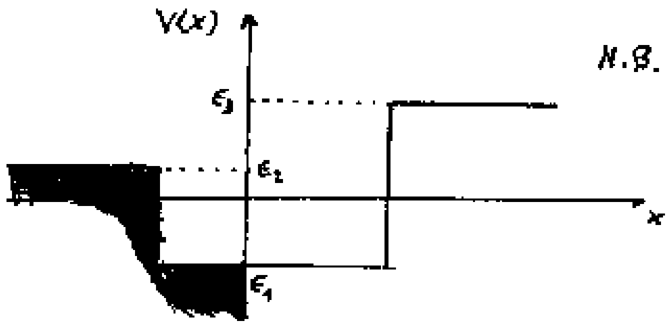
$N = 2 \Rightarrow 2°$ livello eccitato

$N = 3$ (...)

1° OSSERVAZIONE IMPORTANTE

LO SPETTRO DELL'ENERGIA DISCRETO PER UN SISTEMA UNIDIMENSIONALE È NON DEGENERE

2° OSSERVAZIONE IMPORTANTE



N.B. Sistemi unidimensionali

$E > E_3$ SPETTRO CONTINUO E DEGENERE

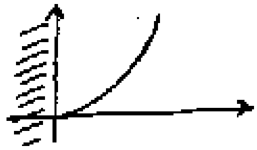
$E_2 < E < E_3$ SPETTRO CONTINUO E NON DEGENERE

$E_1 < E < E_2$ SPETTRO DISCRETO E NON DEGENERE

Esercizio (CASSANDRO)

Una particella di massa m si muove di moto unidimensionale soggetta al seguente potenziale

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x<0 \\ \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$



a) Descrivere gli autostati di H e discuterne la completezza

b) Lo stato descritto da $\psi_1(x) = A\,x \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right]$ con A opportuna costante di normalizzazione è soluzione dell'equazione di Schrödinger stazionaria e con quale autovalore?

c) Esiste uno stato di energia minore?

d) Lo stato descritto da $\psi_2(x) = B\,x^3 \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right]$ è autostato di H?

e) Scrivere l'evoluzione temporale della f.d.o. $\psi(x,0) = \psi_1(x) + \psi_2(x)$

L'equazione che descrive gli stati stazionari è $H\psi = E_n\psi$

dove $H = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)$

Per un oscillatore normale deve risultare $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx < +\infty$

Nel nostro caso $\psi(x)$ deve soddisfare alle due relazioni

1) $\psi(0)=0$ (poiché $\psi(x)=0$ $x<0$ $\Rightarrow$ per continuità $\psi(0)=0$)

2) $\int_0^{\infty} |\psi(x)|^2 dx < +\infty$

Ora H è lo stesso sia per l'oscillatore normale sia per il nostro problema, c'è quindi ambiguità. In effetti la scritta

$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)$ NON definisce un operatore se non si specifica lo spazio su cui si ricercano le soluzioni (o su cui agisce). Nel nostro caso $(-\infty,+\infty)$ oppure $(0,+\infty)$

N.B. Questo problema si pone sempre per operatori che operano in spazi ∞-dimensionali.

Guardiamo ora alle soluzioni per l'oscillatore tra $-\infty$ e $+\infty$ che sappiamo essere

$$u_n(x) = (2^n n!)^{-1/2} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} H_n\left(x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right)$$

e si ha $\int_{-\infty}^{+\infty} |u_n(x)|^2 dx = 1$

Consideriamo ora la proprietà di simmetria dei polinomi di Hermite che dipende dall'indice n $\quad H_n(\alpha x) = (-1)^n H_n(-\alpha x)$

essendo $\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$

A causa di questa proprietà se consideriamo le autofunzioni dispari si ha $u_{(2k+1)}(x) \Rightarrow u_{(2k+1)}(0) = 0$ $\quad$ si devono necessariamente annullare nell'origine

Se guardiamo ora alla soluzione di $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi = E_n\psi$ con la condizione $\psi(0)=0$

$\Rightarrow$ Tutti gli autostati associati a valori dispari di n nel problema tra $-\infty$ e $+\infty$ sono anche autostati del problema tra 0 e $+\infty$ perché soddisfano la condizione $\psi(0)=0$

Non è così per gli autostati associati a valori pari di n perché nel problema tra $-\infty, +\infty$ risulta $u_{2k}(0) \neq 0$

Se considero quindi l'insieme delle funzioni antisimmetriche tra $(-\infty, +\infty)$ senza la condizione $\psi(0)=0$ e l'insieme delle soluzioni per il problema tra $(0, +\infty)$ con la condizione $\psi(0)=0$

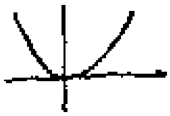
$\Rightarrow$ STO CONSIDERANDO LO STESSO INSIEME DI SOLUZIONI

Le autofunzioni dell'energia nel nostro caso sono quindi della forma

$$u_n(x) = \psi_n(x) = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{fattore di normalizzazione}}}{N}\, e^{-\frac{1}{2}\alpha^2x^2} H_n(\alpha x) \leftarrow \underline{\underline{n \text{ DISPARI}}} \rightarrow E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

Discutiamo ora la completezza

Osserviamo che se consideriamo il problema dell'oscillatore normale



Prendendo solo le f. antisimmetriche $\psi(x) = -\psi(x)$
queste formano un insieme completo...

Se ora limitiamo il problema al solo quadrante positivo prendendo solo le ψ antisimmetriche $\Rightarrow$ ho ancora un insieme completo!

b) SI, perché $\psi_1(x) = A\, x \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right]$ è proporzionale ad $u_1(x)$ ed è dispari, il suo autovalore è $E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$

c) NO, non esiste uno stato di energia minore perché le sue autofunzioni dovrebbero essere pari
Infatti nell'oscillatore normale tra $-\infty$ e $+\infty$ esiste lo stato $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ che è certamente minore di $\frac{3}{2}\hbar\omega$ ma E_0 è associato ad autof. pari.

d) NO, perché non corrisponde (non è proporzionale) a nessuno degli u_n

e) In generale
$$\psi(x,0) = \sum_{0}^{\infty} {}_n\, c_n u_n(x)$$
$$\psi(x,t) = \sum_{0}^{\infty} {}_n\, c_n e^{-iE_n t/\hbar} u_n(x)$$

Conviene scrivere nel nostro caso
$$\psi(x,0) = \sum_{0}^{\infty} {}_k\, c_{2k+1} u_{2k+1}(x)$$
$$\psi(x,t) = \sum_{0}^{\infty} {}_k\, c_{2k+1} e^{-iE_{2k+1}\frac{t}{\hbar}} u_{2k+1}(x)$$

N.B. ricordiamo che le autofunzioni del nostro problema sono
$$u_n(x) = \begin{cases} N e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2} H_n(\alpha x) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

dove N è determinato in base alle condizione di normalizzazione
$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_n|^2 dx = 1$$

Calcolo quindi le costanti di normalizzazione per ciascuna autofunzione (considero solo u_1 ed u_3 perché $\psi(x,0)$ è dispari)

$$u_1(x) = N_1 \alpha x e^{-1/2\,\alpha^2 x^2} \Rightarrow |N_1|^2\alpha^2 \int_0^{\infty} x^2 e^{-\alpha^2 x^2} dx = |N_1|^2 \alpha^2 \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^3} = 1$$

$$\Rightarrow N_1 = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt[4]{\pi}}$$

$$u_3(x) = N_3\, e^{-1/2\,\alpha^2 x^2}(8\alpha^3 x^3 - 12\alpha x) = N_3\, e^{-1/2\,\alpha^2 x^2}\, 4\alpha(2\alpha^2 x^3 - 3x)$$

$$\Rightarrow |N_3|^2 16\alpha^2 \left[4\alpha^4 \int_0^\infty x^6 e^{-\alpha^2 x^2} - 12\alpha^2 \int_0^\infty x^4 e^{-\alpha^2 x^2} dx + 9 \int_0^\infty x^2 e^{-\alpha^2 x^2}\right] =$$

$$= |N_3|^2 16\alpha^2 \left[4\alpha^4 \left(\frac{3\cdot 5\cdot \sqrt{\pi}}{16\alpha^7}\right) - 12\alpha^2 \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{8\alpha^5}\right) + 9\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^3}\right)\right] =$$

$$= |N_3|^2 \frac{8\sqrt{\pi}}{\alpha} \cdot 3 = 1 \quad \Rightarrow \quad |N_3| = \frac{\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{6}\,\sqrt[4]{\pi}}$$

Quindi

$$u_1(x) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt[4]{\pi}}\, \alpha x\, e^{-1/2\,\alpha^2 x^2}$$

$$u_3(x) = \frac{\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{6}\,\sqrt[4]{\pi}}\, e^{-1/2\,\alpha^2 x^2}(8\alpha^3 x^3 - 12\alpha x)$$

Calcolo ora le costanti A e B

$$|A|^2 \int_0^\infty x^2 e^{-\alpha^2 x^2} dx = |A|^2 \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^3} = 1 \quad \Rightarrow \quad |A| = \frac{2\alpha\sqrt{\alpha}}{\sqrt[4]{\pi}}$$

$$|B|^2 \int_0^\infty x^6 e^{-\alpha^2 x^2} dx = |B|^2 \frac{15\sqrt{\pi}}{16\alpha^7} = 1 \quad \Rightarrow \quad |B| = \frac{4\,\alpha^{7/2}}{\sqrt{15}\,\sqrt[4]{\pi}}$$

Quindi

$$\psi_1(x) = \frac{2\alpha\sqrt{\alpha}}{\sqrt[4]{\pi}}\, x\, e^{-1/2\,\alpha^2 x^2}$$

$$\psi_2(x) = \frac{4\alpha^3\sqrt{\alpha}}{\sqrt{15}\,\sqrt[4]{\pi}}\, x^3 e^{-1/2\,\alpha^2 x^2}$$

Lo stato $\psi(x,0)$ normalizzato sarà quindi $\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1(x,0) + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2(x,0)$