Esercizio 1° Esonero Cassandro 4 aprile 1995

Un oscillatore armonico unidimensionale ha massa m e pulsazione ω. Eseguendo misure di energia si trovano i valori $\frac{3}{2}\hbar\omega$ e $\frac{7}{2}\hbar\omega$ con valor medio $2\hbar\omega$

a) determinare con quali probabilità si ottengono le energie permesse e scrivere lo stato più generale compatibile con queste informazioni

b) Determinare lo stato $|\psi\rangle$ completamente sapendo che al tempo $t=0$ si ha

$$\langle\psi|X^2|\psi\rangle = \frac{11}{4}\frac{\hbar}{m\omega}$$

$$\langle\psi|\frac{XP+PX}{2}|\psi\rangle = -\frac{3}{4}\hbar$$

essendo X e P la coordinata e l'impulso dell'oscillatore

c) Calcolare il valor medio in funzione del tempo, degli osservabili $(a^\dagger a, a^\dagger a$ e X^2.

d) Determinare la corrente di probabilità in $x=0$ in funzione del tempo

e) all'istante $t_1>0$ viene eseguita una misura di energia di cui ignoriamo il risultato. Calcolare i valori possibili, e le relative probabilità dello scarto quadratico medio dell'osservabile $A = \frac{(XP+PX)}{2}$ ad un tempo $t_2>t_1$

$$\boxed{k^2 = \frac{m\omega}{\hbar}}$$

$$\boxed{H_1(y) = 2y \quad H_3 = 4y(2y^2-3)}$$

$$E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega \Rightarrow \psi_1(x) = \frac{\sqrt{2k}}{\pi^{1/4}} e^{-\frac{k^2x^2}{2}} H_1(kx) = \frac{4k^{3/2}}{\pi^{1/4}} e^{-\frac{k^2x^2}{2}} x$$

$$E_3 = \frac{7}{2}\hbar\omega \Rightarrow \psi_3(x) = \sqrt{\frac{k}{3}}\frac{1}{2\pi^{1/4}} e^{-\frac{k^2x^2}{2}} H_3(kx) = \frac{2k^{3/2}}{\sqrt{3}\,\pi^{1/4}} x(2k^2x^2-3) e^{-\frac{k^2x^2}{2}}$$

$$\psi(x) = B_1\psi_1(x) + e^{i\theta}B_3 A\,\psi_3(x) \qquad \text{con } B_1, B_3 \in \mathbb{R} \mid \text{e } B_3^2 = 1 - B_1^2$$

$$\langle E\rangle = \langle\psi|H|\psi\rangle = E_1B_1^2 + E_3B_3^2 = \frac{\hbar\omega}{2}\left[3B_1^2 + 7(1-B_1^2)\right] = \frac{\hbar\omega}{2}(7-4B_1^2)$$

$$7-4B_1^2 = 4 \Rightarrow B_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad B_2 = \sqrt{1-3/4} = 1/2$$

$$P(E=E_1) = B_1^2 = \frac{3}{4} \qquad P(E=E_3) = B_3^2 = \frac{1}{4}$$

$$\psi = \frac{e^{-k^2x^2/2}}{2\pi^{1/4}}\sqrt{k}\left[\sqrt{6}H_1(kx) + \frac{\sqrt{3}}{6}e^{i\theta}H_3(kx)\right]$$

$$\langle\psi|x^2|\psi\rangle = \frac{k}{4\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-k^2x^2}\left(\sqrt{6}H_1 + \frac{\sqrt{3}}{6}e^{i\theta}H_3\right)^2 dx = \frac{1}{4k^2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2}\left[\sqrt{6}H_1(y) + \frac{\sqrt{3}}{6}H_3(y)\right]^2$$

$$= \frac{1}{4\kappa^2}\left[\ldots \frac{3}{\ldots} \int_{-\infty} \ldots e^{-y^2} dy + 4\sqrt{2}\, e^{i\theta} \int_{-\infty} \ldots \right] =$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\langle \psi | \frac{xp - px}{2} | \psi \rangle \quad - \frac{3}{4}\hbar$$

$$\frac{\ldots}{2}\langle \psi | x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} x | \psi \rangle = \frac{i\sqrt{\kappa}\,\hbar}{4\pi^{1/4}}\left[\sqrt{\ldots} \int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-\frac{\kappa^2 x^2}{2}} H_1(\kappa x) \frac{\partial}{\partial x} \ldots \right.$$

$$\ldots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \ldots dx + \frac{\sqrt{3}}{6} e^{i\theta} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-\kappa^2 x^2/2} H_3(\kappa x)\right) dx + \frac{\sqrt{3}}{6} e^{i\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-\frac{\kappa^2 x^2}{2}} H_3\right) \ldots$$

$$= \frac{i\sqrt{\kappa}\,\hbar}{4\pi^{1/4}}\left[\frac{\sqrt{\ldots}\,\kappa}{\kappa^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-\frac{y^2}{2}} H_1(y) \right) dy + \frac{\sqrt{6}}{\kappa}\left[x\, e^{-\frac{\kappa^2 x^2}{2}} H_1 \right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{\sqrt{3}}{\kappa} e^{i\theta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} H_3\, dy + \frac{\sqrt{3}}{6\kappa} e^{i\theta} \left[e^{-\frac{y^2}{2}} H_3\, x \right]_{-\infty}^{\infty} \right] =$$

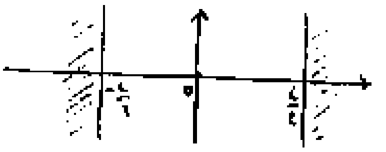
$$= \frac{i\sqrt{\kappa}\,\hbar}{4\pi^{1/4}}\left[\frac{2\sqrt{\ldots}}{\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \right.$$

$$\boxed{z = \frac{y}{\sqrt{2}}}$$

SI PUO'
RISOLVERE
PIU' SEMPLICEMENTE
CON IL FORMALISMO
DI DIRAC E a e a^+

PARTICELLA LIBERA SU SEGMENTO (centrato nell'origine di larghezza L)

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| < \frac{L}{2} \\ \infty & |x| > \frac{L}{2} \end{cases}$$



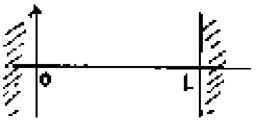
autofunzioni corrispondenti agli autostati dell'energia

$$\begin{cases} \psi_S(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) & n = 1, 3, 5, \dots \\ \psi_A(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \qquad E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2 m L^2}$$

$$\psi_S(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \frac{(2n+1)x\pi}{L}$$

$$\psi_A(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)$$

Segmento $[0, L]$



$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2 m L^2}$$

$n = 1, 2, 3,$

Segmento $[-L, L]$

$$\psi_S(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \cos\left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}\right) \qquad E_n^+ = \frac{(n+1/2)^2 \pi^2 \hbar^2}{2 m a^2}$$

$$\psi_A(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad E_n^- = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{8 m a^2}$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^x + 1} = \log(1 + e^{-x}) \Big|_0^\infty$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^x - 1} = \log(1 - e^{-x}) \Big|_0^\infty$$

$$U = \int_0^\infty \varepsilon g(\varepsilon) d\varepsilon \qquad g(\varepsilon) d\varepsilon = d\omega(\varepsilon)$$

a $T = 0\,K$ $\quad U = \int_0^{E_F} \varepsilon\, d\omega(\varepsilon)$

$$MV = \mathcal{M}_S = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial}{\partial B_z} \log Z\right) \longrightarrow M = \frac{\mathcal{M}_S}{V}$$

OSCILLATORE ARMONICO

Autostati di $H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$ sono $|n\rangle$

$H|n\rangle=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)|n\rangle$ $\qquad \underline{E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega}$ $\quad n=0,1,2,3,\dots$

$\xi=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x$

$\psi_n(x)=\langle x|n\rangle=(2^n n!)^{-1/2}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}e^{-\xi^2/2}\,H_n(\xi)$

$H_0(\xi)=1$

$H_1(\xi)=2\xi$

$H_2(\xi)=4\xi^2-2$

$H_3(\xi)=8\xi^3-12\xi$

$H_4(\xi)=16\xi^4-48\xi^2+12$?

$a=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x+\frac{ip}{m\omega}\right)$ $\qquad a^+=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x-\frac{ip}{m\omega}\right)$

$[a,a^+]=1$ $\qquad N=a^+a$ $\qquad H=\hbar\omega\left(N+\frac{1}{2}\right)$

$N|n\rangle=a^+a|n\rangle=n|n\rangle$ $\qquad N=N^+$

$[N,a]=[a^+a,a]=-a$ $\qquad a|n\rangle=\sqrt{n}\,|n-1\rangle$

$[N,a^+]=a^+$ $\qquad a^+|n\rangle=\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$

$Na^+|n\rangle=(N-$ [illegible]

[illegible]

$x=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a+a^+)$ $\qquad p=i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\,(-a+a^+)$

Istituzioni di Fisica Teorica - I prova di esonero

A.A. 1995-96 - 7 Novembre 1995

(1) L' hamiltoniana di una particella è:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2.$$

Determinare lo stato iniziale, $|\alpha, t=0\rangle$, sapendo che:

a) una misura di energia dà certamente un valore minore di $3\hbar\omega$, $\hbar\omega(n+1/2)$

b) lo stato è autostato della parità con autovalore $+1$, $n=0,1,2$

c) $\langle H \rangle = (7/6)\hbar\omega$, $\langle \psi|H|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle E$

d) $\langle x^2 \rangle_{t=0}$ è il massimo compatibile con le condizioni precedenti.

Determinare inoltre $|\alpha, t\rangle$ e $\langle x^2 \rangle_t$.

(2) Si consideri un sistema quantistico descritto dall' hamiltoniana:

$$H = E(|1\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 1| + \frac{1}{2}|2\rangle\langle 2|),$$

dove E è una costante positiva e i vettori $|1\rangle$, $|2\rangle$ e $|3\rangle$ costituiscono una base ortonormale completa.

a) Determinare autoket e autovalori di H.

Si consideri inoltre l' osservabile

$$A = |1\rangle\langle 1| - |3\rangle\langle 3|.$$

b) Determinarne gli autoket e gli autovalori.

Al tempo $t = 0$ lo stato del sistema, $|\alpha, t=0\rangle$, è tale che una misura di A dà certamente il suo massimo autovalore.

c) Determinare $|\alpha, t\rangle$.

d) Esiste un valore di $t > 0$ tale che una misura di A dà con certezza uno degli altri autovalori ? In caso affermativo determinare t.

Soluzione 1° Esercizio della I prova di Esonero del 7 novembre 1995

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \qquad E_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega \quad \cancel{E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega} \quad \cdot E_2 = \frac{5}{2}\hbar\omega \quad \cdot \cancel{E_3 = \frac{7}{2}\hbar\omega}$$

Poiché una misura della parità ha dato risultato +1 (cioè lo stato è autostato di $\mathbb{P}$ con autovalore +1) lo stato sarà solo combinazione lineare di autofunzioni PARI dell'oscillatore

Quindi $|\psi(x,0)\rangle = c_0|0\rangle + c_2|2\rangle$

ora $\langle\psi|H|\psi\rangle = \sum_n |c_n|^2 E_n = |c_0|^2 \frac{1}{2}\hbar\omega + |c_2|^2 \frac{5}{2}\hbar\omega = \frac{7}{6}\hbar\omega$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}|c_0|^2 + \frac{5}{2}|c_2|^2 = 7/6 \\ |c_0|^2 + |c_2|^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |c_0|^2 = 1 - |c_2|^2 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}|c_2|^2 + \frac{5}{2}|c_2|^2 = \frac{7}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow |c_0|^2 = \frac{2}{3} \qquad |c_2|^2 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow |\psi\rangle = e^{i\varphi_1}\sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle + e^{i\varphi_2}\sqrt{\frac{1}{3}}|2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\, e^{i\varphi}|2\rangle$$

dove $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$

$$\langle\psi|X^2|\psi\rangle = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\langle 0| + \sqrt{\frac{1}{3}}\, e^{-i\varphi}\langle 2|\right) X^2 \left(\sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\, e^{i\varphi}|2\rangle\right)$$

è noto ora che $X^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(a^+a^+ + a a^+ + a^+a + a^2\right)$

ed inoltre $a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$

$a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$

$$\frac{\hbar}{2m\omega}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\langle 0| + \sqrt{\frac{1}{3}}\, e^{-i\varphi}\langle 2|\right)\left(a^+a^+ + aa^+ + a^+a + aa\right)\left(\sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\, e^{i\varphi}|2\rangle\right) =$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\frac{2}{3}\langle 0|aa^+|0\rangle + \frac{\sqrt{2}}{3} e^{-i\varphi}\langle 2|a^+a^+|0\rangle + \frac{1}{3} e^{-i\varphi}e^{+i\varphi}\langle 2|aa^+|2\rangle + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3}\langle 2|a^+a|2\rangle + \frac{\sqrt{2}}{3} e^{i\varphi}\langle 0|aa|2\rangle\right)$$

Tenendo in conto che

$$\langle 0|a a^\dagger|0\rangle = \langle 0|a|1\rangle 1$$

$$\langle 2|a^\dagger a^\dagger|0\rangle = \langle 2|a^\dagger|1\rangle = \sqrt{2}$$

$$\langle 2|a a^\dagger|2\rangle = \langle 2|a|3\rangle\sqrt{3} = 3$$

$$\langle 2|a^\dagger a|2\rangle = \langle 2|a^\dagger|1\rangle\sqrt{2} = 2$$

$$\langle 0|a a|2\rangle = \langle 0|a|1\rangle\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \langle X^2\rangle_{t=0} = \frac{\hbar}{2m\omega}\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right)\right] = \frac{\hbar}{m\omega}\left(\frac{7}{6}+\frac{2}{3}\cos\varphi\right)$$

affinché si abbia un massimo deve essere $\cos\varphi = 1$ cioè $\varphi = 0$

$$\Rightarrow |\psi(x,0)\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|2\rangle$$

$$\Rightarrow |\psi(x,t)\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\, e^{-i\omega\frac{t}{2}}|0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\, e^{-i\frac{5}{2}\omega t} \Rightarrow$$

$$|\psi(x,t)\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\, e^{-i2\omega t}|2\rangle$$

essendo questa espressione analoga a quella precedente ove $2\omega t$ gioca il ruolo di φ possiamo immediatamente scrivere

$$\langle\psi_t|X^2|\psi_t\rangle = \frac{\hbar}{m\omega}\left(\frac{7}{6}+\frac{2}{3}\cos 2\omega t\right)$$

Soluzione 2° Problema di esonero del 7 novembre 1995

$$H = E\left(|1\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 1| + \frac{1}{2}|2\rangle\langle 2|\right)$$

N.B. $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$ base ORTONORMALE $\Rightarrow H|2\rangle = \frac{E}{2}|2\rangle$

Quindi $|2\rangle$ è un autovettore di H con autovalore $\frac{E}{2}$

Trovato quindi un autovettore il problema della ricerca degli altri è ricondotto allo spazio normale a quest'ultimo $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & E/2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ dobbiamo studiare matrice 2×2 che dalla forma di H si vede essere $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

Quindi gli autovalori di H in tale sottospazio sono $E, -E$

gli autovettori associati saranno quindi

$\lambda = E \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad\quad$ $\lambda = -E \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

In definitiva $|E/2\rangle = |2\rangle$ $\quad |E\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle + |3\rangle\right)$ $\quad |-E\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle - |3\rangle\right)$

Consideriamo ora $A = |1\rangle\langle 1| - |3\rangle\langle 3|$

nella base di partenza $|1\rangle|2\rangle|3\rangle$ A è già diagonale $A = |1\rangle\langle 1| - |3\rangle\langle 3| + 0|2\rangle\langle 2|$

autovalori di A $\quad\quad$ autovettori associati

$a = +1 \longrightarrow |1\rangle$

$a = -1 \longrightarrow |3\rangle$

$a = 0 \longrightarrow |2\rangle$

Quindi la base iniziale in cui è scritta H è la base in cui A è diagonale

Ora al tempo t=0 una misura di A fornisce "certamente" l'autovalore $a = 1$:

quindi il sistema al tempo t=0 si trova nell'autostato $|1\rangle$

$\Rightarrow |\alpha, t=0\rangle = |1\rangle$ che scritto come combinazione di autostati di H

diventa $|\alpha, t=0\rangle = |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|E\rangle + |-E\rangle\right)$ $\quad$ quindi l'evoluto al tempo t

sarà $|\alpha, t\rangle = \frac{e^{-iEt/\hbar}}{\sqrt{2}}|E\rangle + \frac{e^{+iEt/\hbar}}{\sqrt{2}}|-E\rangle$

Bisogna determinare (se esiste) quel valore di tempo $t^* > 0$ per il quale una misura di A fornisce con certezza uno degli altri autovalori cioè $|2\rangle$ o $|3\rangle$

Bisogna quindi scrivere $|d,t\rangle$ nella base $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$:

$$|d,t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-iEt/\hbar}\left(\frac{|1\rangle + |3\rangle}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{iEt/\hbar}\left(\frac{|1\rangle - |3\rangle}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{iEt/\hbar} + e^{-iEt/\hbar}\right]|1\rangle + \frac{1}{2}\left[e^{-iEt/\hbar} - e^{iEt/\hbar}\right]$$

$$\Rightarrow \quad |d,t\rangle = \cos\left(\frac{Et}{\hbar}\right)|1\rangle - i \,\mathrm{sen}\left(\frac{Et}{\hbar}\right)|3\rangle$$

Ora certamente per nessun valore di t posso ottenere $|2\rangle$ quindi non otterrò mai $a=0$ ad una misura di A al tempo $t>0$ perché $|2\rangle$ non compare nella combinazione

Però se t^* è tale che $\mathrm{sen}\left(\frac{Et^*}{\hbar}\right) = \pm 1$ allora il coseno si annulla ed il sistema si troverà nell'autostato corrispondente ad $a=-1$

t^* sarà quindi tale che $\frac{Et^*}{\hbar} = \frac{\pi}{2}(2k+1)$ $\Rightarrow$ il primo istante per cui ciò si verifica si ha per $k=0$ $\Rightarrow$ $\boxed{t^* = \frac{\pi\hbar}{2E}}$

Esercizio

Una particella si trova in un segmento $[0,L]$ ed all'istante $t=0$ è una sovrapposizione di autostati dell'hamiltoniana con energie rispettivamente $E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$, $E_2 = 4E_1$.
In tale stato $\overline{E} = \frac{5}{2}E_1$ e $\overline{p} = 0$

Dimostrare che esistono due stati linearmente indipendenti che soddisfano queste condizioni e scrivere le f.d.o.

LE AUTOFUNZIONI DI UNA PARTICELLA LIBERA SU $[0,L]$ SONO:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L} \quad \text{con autovalore } E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2mL^2}$$

NEL NOSTRO CASO:

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi x}{L} \quad \text{con } E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$$

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi x}{L} \quad \text{con } E_2 = \frac{4\hbar^2\pi^2}{2mL^2}.$$

E!

$$\psi(x) = A\,\psi_1(x) + B\,e^{i\vartheta}\,\psi_2(x) \qquad A, B, \vartheta \in \mathbb{R}$$

E $B^2 = 1 - A^2$. ALLORA:

dalla condizione di normalizzazione: $A^2+B^2=1$

$$\langle\psi|H|\psi\rangle = \overline{E} = E_1A^2 + E_2B^2 = E_1\left[A^2 + 4(1-A^2)\right] =$$

$$= E_1(-3A^2+4) = \frac{5}{2}E_1 \Rightarrow 4 - 3A^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow A^2 = \frac{1}{2} = B^2$$

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\psi_1(x) + e^{i\vartheta}\psi_2(x)\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{2}{L}}\left(\mathrm{sen}\,\frac{\pi x}{L} + e^{i\vartheta}\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi x}{L}\right)$$

$$\langle\psi|p|\psi\rangle = \overline{p} = \langle\psi|-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}|\psi\rangle = -\frac{i\hbar}{L}\int_0^L\left(\mathrm{sen}\,\frac{\pi x}{L} + e^{-i\vartheta}\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi x}{L}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{sen}\,\frac{\pi x}{L} + e^{i\vartheta}\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi x}{L}\right) =$$

$$\boxed{y = \frac{\pi}{L}x}$$

$$= -\frac{i\hbar}{L}\int_0^L\left(\mathrm{sen}\,\frac{\pi x}{L} + e^{-i\vartheta}\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi x}{L}\right)\left(\cos\frac{\pi x}{L} + 2e^{i\vartheta}\cos\frac{2\pi x}{L}\right)dx =$$

$$= -\frac{i\hbar}{L}\int_0^\pi\left(\mathrm{sen}\,y\cos y + 2\,\mathrm{sen}\,2y\cos 2y + e^{-i\vartheta}\,\mathrm{sen}\,2y\cos y + e^{i\vartheta}\,\mathrm{sen}\,y\cos 2y\right)$$

$$= -\frac{i\hbar}{L}\left(\cancel{\left[\frac{\mathrm{sen}^2 y}{2}\right]_0^\pi} + \cancel{\left[\frac{\mathrm{sen}^2 2y}{2}\right]_0^\pi} + 2e^{-i\vartheta}\int_0^\pi \mathrm{sen}\,y\cos^2 y\,dy + e^{i\vartheta}\int_0^\pi \mathrm{sen}\,y(2\cos^2 y - 1)\right)$$

$$= -\frac{i\hbar}{L}\left[-2e^{-i\vartheta}\left[\frac{\cos^3 y}{3}\right]_0^\pi + e^{i\vartheta}\left(2\left[\frac{\cos^3 y}{3}\right]_0^\pi + \left[\cos y\right]_0^\pi\right)\right] =$$

$$= -\frac{i\hbar}{L}\left(-\frac{8}{3}\,\mathrm{sen}\,\vartheta - 2\right) = \frac{2}{3}\frac{i\hbar}{L}(4\,\mathrm{sen}\,\vartheta + 3) = 0 \qquad \mathrm{sen}\,\vartheta = -\frac{3}{4}$$

Esercizio

Un oscillatore armonico è descritto al tempo $t=0$ dalla f. d. o.

$$\psi(x,0) = A x^3 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$ con A costante di normalizzazione

1) Calcolare al tempo $t=0$ i valori medi $\langle \Pi \rangle_0$ della parità, $\langle H \rangle_0$ dell'energia, $\langle P \rangle_0$ e dell'impulso

2) Determinare la $\psi(x,t)$

3) determinare in funzione del tempo $\langle \Pi \rangle_t$, $\langle H \rangle_t$, $\langle P \rangle_t$

LE F. d. O. DI UN OSCILLATORE ARMONICO SONO:

$$\psi_n(x) = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2^n n!}\,\pi^{1/4}} e^{-\frac{k^2x^2}{2}} H_n(kx) \qquad k = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

DOVE: $H_0(kx) = 1$ $H_1(kx) = 2kx$ $H_2(kx) = 2(2k^2x^2-2)$

$H_3(kx) = 4kx(2k^2x^2-3)$. DOBBIAMO SVILUPPARE Ax^3 NELLA BASE DEGLI H_n

$$x^3 = \frac{H_3}{8k^3} + \frac{\overset{3}{\cancel{6}} H_1}{\cancel{8}k^3} = \frac{8k^3x^3 - \cancel{12kx} + \cancel{12kx}}{8k^3}$$

PER CUI $\psi(x,0)$ È COMB. LIN. DI ψ_1 e ψ_3

$$\psi(x,0) = \frac{A}{\sqrt{k}\,\pi^{1/4}k}\left(\sqrt{\frac{k\cdot 48}{8k}}H_3 + 6\sqrt{\frac{k\cdot 2}{2\cdot k}}H_1\right)e^{-k^2x^2/2} = \tilde{A}\left(\sqrt{48}\,\psi_3 + 6\sqrt{2}\,\psi_1\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sqrt{2}\,\psi_3 + \sqrt{3}\,\psi_1\right)$$

SAPPIAMO CHE $H = \left(a^+a + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ E $p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(-a + a^+\right)$

PER CUI

$$\langle H \rangle_0 = \frac{\hbar\omega}{5}\langle\sqrt{2}\psi_3 + \sqrt{3}\psi_1 | a^+a + \tfrac{1}{2} | \sqrt{2}\psi_3 + \sqrt{3}\psi_1\rangle =$$

$$= \frac{\hbar\omega}{5}\left(2\langle 3|a^+a + \tfrac{1}{2}|3\rangle + 3\langle 1|a^+a + \tfrac{1}{2}|1\rangle\right) =$$

$$= \frac{\hbar\omega}{5}\left(1 + 2\sqrt{3}\langle 3|a^+|2\rangle + \frac{3}{2} + 3\langle 1|a^+|0\rangle\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{5}{2} + 6 + 3\right) =$$

$$= \frac{23}{10}\hbar\omega$$ (ALLO STESSO RISULTATO SI POTEVA ARRIVARE CON $\langle H \rangle = E_3\frac{2}{5} + E_1\cdot\frac{3}{5} = \hbar\omega\left(\frac{7}{2}\frac{2}{5} + \frac{3}{2}\frac{3}{5}\right) = \frac{23}{10}\hbar\omega$

$$\langle P \rangle_0 = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\langle\sqrt{2}\psi_3 + \sqrt{3}\psi_1| -a + a^+ |\sqrt{2}\psi_3 + \sqrt{3}\psi_1\rangle =$$

$$= i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\Big(2\langle 3|-a+a^+|3\rangle + 3\langle 1|-a+a^+|1\rangle + \sqrt{6}\langle 1|-a+a^+|3\rangle + \sqrt{6}\langle 3|-a+a^+|1\rangle\Big) = 0$$

PER LA PARITÀ LA ψ È DISPARI E TALE RIMARRÀ NEL TEMPO, QUINDI

$$\langle \pi \rangle_0 = \langle \pi \rangle_t = -1$$

Esercizio

Una particella di massa m si muove in una dimensione soggetta al potenziale

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| > a \\ -V_0 & |x| < a \end{cases}$$

si chiede:

1) Quale deve essere la profondità della buca affinché il 1° livello eccitato abbia energia $E_1 = -\frac{1}{2} V_0$

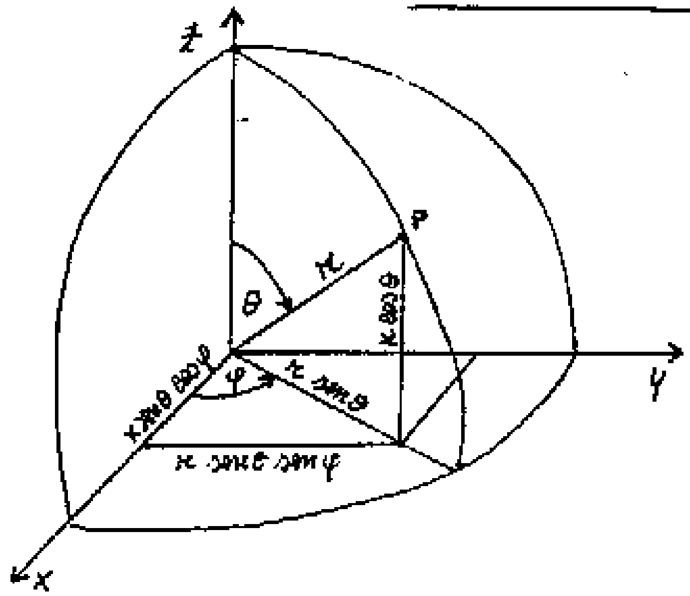
2) Se la particella si trova nell'autostato di energia E_1, quale è la probabilità di trovarla nella regione classicamente proibita?

3) Il livello fondamentale soddisfa le condizioni $-V_0 < E_0 < -\frac{1}{2} V_0$ determinare due limiti più stringenti per E_0

4) Quanti sono gli stati legati di questa Hamiltoniana?

Esercizio

Si calcoli il valor medio della componente del momento angolare lungo una direzione $\underline{n}$ che forma l'angolo θ con l'asse z, se il sistema è in un autostato di L^2 e di L_z



OSSERVAZIONE

L'operatore che individua la componente del momento angolare lungo una generica direzione $\underline{n}$ è $\underline{L}\cdot\underline{n}$ dove $\underline{L} = (L_x, L_y, L_z)$ ed $\underline{n}$ è il VERSORE di componenti rispettivamente $\underline{n} = (\text{sen}\,\theta\cos\varphi,\ \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi,\ \cos\theta)$

Abbiamo quindi $\underline{L}\cdot\underline{n} = L_x\,\text{sen}\,\theta\cos\varphi + L_y\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi + L_z\cos\theta$

$$\Rightarrow \langle l, m|\underline{L}\cdot\underline{n}|l, m\rangle = \text{sen}\,\theta\cos\varphi\underbrace{\langle l, m|L_x|l, m\rangle}_{\langle L_x\rangle\ \text{NULLO}} + \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi\underbrace{\langle l, m|L_y|l, m\rangle}_{\langle L_y\rangle\ \text{NULLO}}$$

$$+ \cos\theta\langle l, m|L_z|l, m\rangle = \cos\theta\, m\hbar\langle l, m|l, m\rangle = m\hbar\cos\theta$$

Esercizio

Calcolare i valori medi di L_x e di L_y in un autostato di L^2 e di L_z

---

Sia $|l,m\rangle$ un autostato contemporaneo di L^2 e di L_z con $l(l+1)\hbar^2$ autovalore di L^2 e $m\hbar$ autovalore di L_z

Calcoliamo anzitutto $L_x|l,m\rangle = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)|l,m\rangle$

ricordando che $L_+|l,m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}\,|l,m+1\rangle$

$L_-|l,m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}\,|l,m-1\rangle$

$\Rightarrow L_x|l,m\rangle = \frac{\hbar}{2}\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}\,|l,m+1\rangle + \frac{\hbar}{2}\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}\,|l,m-1\rangle$

$\Rightarrow \langle l,m|L_x|l,m\rangle = 0$ essendo stati $|l,m\rangle$ ortonormali

e quindi $\langle l,m|l,m\pm 1\rangle = 0$

Analogamente $\langle l,m|L_y|l,m\rangle = \langle l,m|\frac{L_+ - L_-}{2i}|l,m\rangle = 0$

Esercizio

Mostrare che in uno stato $|l,m\rangle$ con $l(l+1)\hbar^2$ autovalore di L^2 ed $m\hbar$ autovalore di L_z i valori medi di L_x^2 e di L_y^2 sono

$\langle L_x^2\rangle = \langle L_y^2\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\left[l(l+1)-m^2\right]$.

Si ha $\langle l,m|L_x^2|l,m\rangle = \langle l,m|L_xL_x|l,m\rangle = \langle l,m|L_x^\dagger L_x|l,m\rangle$

essendo L_x hermitiano $\Rightarrow L_x^\dagger = L_x$

quindi $\langle l,m|L_x^2|l,m\rangle = \||L_x|l,m\rangle\|^2 =$ (vedi esercizio precedente)

$= \frac{\hbar^2}{4}\left[l(l+1)-m(m+1)\right] + \frac{\hbar^2}{4}\left[l(l+1)-m(m-1)\right] =$ avendo quadrato le componenti (N.B. stati ortogonali)

$= \frac{\hbar^2}{4}\left[2l(l+1) - m^2 - \cancel{m} - m^2 + \cancel{m}\right] = \frac{\hbar^2}{2}\left[l(l+1)-m^2\right]$ c.v.d.

discorso analogo per $\langle L_y^2\rangle$

Esercizio

Calcolare gli autovalori degli operatori L_x ed L_y nel caso $\ell = 1$ e determinarne gli autovettori nella base di autoket di L^2 ed L_z

---

$|\ell, m\rangle$

$\underline{\ell = 1} \Rightarrow m = +1, 0, -1$ numerando righe e colonne da $m = +1$ a $m = -1$

si ha $L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad L_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$ $\quad L_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

ed inoltre $L^2 = 2\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

OSSERVAZIONE

$$\begin{cases} L_z |1,1\rangle = \hbar |1,1\rangle \\ L_z |1,0\rangle = 0 |1,0\rangle \\ L_z |1,-1\rangle = -\hbar |1,-1\rangle \end{cases} \qquad \begin{cases} L^2 |1,1\rangle = 2\hbar^2 |1,1\rangle \\ L^2 |1,0\rangle = 2\hbar^2 |1,0\rangle \\ L^2 |1,-1\rangle = 2\hbar^2 |1,-1\rangle \end{cases}$$

$$L_x = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\hbar}{\sqrt{2}} & 0 & \hbar/\sqrt{2} \\ 0 & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(L_x - \lambda I) = -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{\hbar^2}{2}\right) - \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\lambda\right) = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 + \lambda\frac{\hbar^2}{2} + \lambda\frac{\hbar^2}{2} = -\lambda^3 + \lambda\hbar^2 = \lambda(\hbar^2 - \lambda) = 0$$

$\Rightarrow$ autovalori sono $\lambda_1 = \hbar$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -\hbar$

$$\lambda_1 = \hbar \quad \begin{cases} -\hbar x_1 + \frac{\hbar}{\sqrt{2}} x_2 = 0 \\ \frac{\hbar}{\sqrt{2}} x_2 - \hbar x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x_2}{\sqrt{2}} = x_1 \\ \frac{x_2}{\sqrt{2}} = x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x_2}{\sqrt{2}} = x_1 \\ x_1 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow |\alpha|^2 (1+2+1) = 1 \Rightarrow \alpha = 1/2$ chiamo questo autovettore $|1,1\rangle_x$

$$\Rightarrow |1,1\rangle_x = \frac{1}{2}|1,1\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}|1,0\rangle + \frac{1}{2}|1,-1\rangle$$

$$\lambda_2 = 0 \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = -x_3 \end{cases} \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\alpha|^2 (1+1) = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow |1,0\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}|1,1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1,-1\rangle$$

$$\lambda_3 = -\hbar \quad \begin{cases} \frac{x_2}{\sqrt{2}} = -x_1 \\ \frac{x_2}{\sqrt{2}} = -x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x_2}{\sqrt{2}} = -x_1 \\ x_1 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

quindi

$$\boxed{\begin{cases} |1,1\rangle_x = \frac{1}{2}|1,1\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}|1,0\rangle + \frac{1}{2}|1,-1\rangle \\ |1,0\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}|1,1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1,-1\rangle \\ |1,-1\rangle_x = \frac{1}{2}|1,1\rangle - \frac{\sqrt{2}}{2}|1,0\rangle + \frac{1}{2}|1,-1\rangle \end{cases}}$$

autovalori di L_y

$$\det\begin{pmatrix} 0-\lambda & -i\frac{\hbar}{\sqrt{2}} & 0 \\ i\frac{\hbar}{\sqrt{2}} & 0-\lambda & -i\hbar/\sqrt{2} \\ 0 & i\frac{\hbar}{\sqrt{2}} & 0-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda\left(\lambda^2-\frac{\hbar^2}{2}\right) + i\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\left(-i\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\lambda\right) = -\lambda\left[\left(\lambda^2-\frac{\hbar^2}{2}\right)-\frac{\hbar^2}{2}\right] = 0 \quad \text{autovalori} \quad \begin{matrix}\lambda_1 = \hbar \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = -\hbar\end{matrix}$$

$$\lambda_1 = \hbar \quad \begin{cases} -\hbar x_1 - i\frac{\hbar}{\sqrt{2}}x_2 = 0 \\ \frac{i\hbar}{\sqrt{2}}x_2 - \hbar x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -x_1 = x_3 \\ \frac{i}{\sqrt{2}}x_2 = x_3 \end{cases} \quad \Rightarrow \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$|\alpha|^2(1+2+1) = 1 \quad \Rightarrow \alpha = 1/2$$

$$\lambda_2 = 0 \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = x_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = -\hbar \quad \begin{cases} x_1 = x_2\frac{i}{\sqrt{2}} \\ x_3 = -x_2\, i/\sqrt{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_1 = \frac{i}{\sqrt{2}}x_2 \end{cases} \qquad \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

quindi

$$\boxed{\begin{cases} |1,1\rangle_y = \frac{1}{2}|1,1\rangle + i\frac{\sqrt{2}}{2}|1,0\rangle - \frac{1}{2}|1,-1\rangle \\ |1,0\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}|1,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1,-1\rangle \\ |1,-1\rangle_y = \frac{1}{2}|1,1\rangle - i\frac{\sqrt{2}}{2}|1,0\rangle - \frac{1}{2}|1,-1\rangle \end{cases}}$$

Normalizzazione

$$|\alpha|^2\left[\frac{\operatorname{sen}^2\theta(\cos\theta+1)}{2(1-\cos\theta)^2}+(\cos\theta+1)^2+\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}\right]=1$$

$$|\alpha|^2\left[\frac{\operatorname{sen}^2\theta(\cos\theta+1)^2+2(\cos\theta+1)^2(1-\cos\theta)^2+\operatorname{sen}^2\theta(1-\cos\theta)^2}{2(1-\cos\theta)^2}\right]\quad 1$$

$$|\alpha|^2\left[\frac{\operatorname{sen}^2\theta(\cos^2\theta+\cancel{2\cos\theta}+1)+\operatorname{sen}^2\theta(1-\cancel{2\cos\theta}+\cos^2\theta)+2(\cos\theta+1)^2(1-\cos\theta)^2}{2(1-\cos\theta)^2}\right]=1$$

$$|\alpha|^2\left[\frac{\operatorname{sen}^2\theta(1+\cos^2\theta)+(1-\cos^2\theta)^2}{(1-\cos\theta)^2}\right]=\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{(1-\cos\theta)^2}|\alpha|^2(1+\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)=1$$

$$\Rightarrow\quad \alpha=\frac{1-\cos\theta}{\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{|1,1\rangle_n=\frac{1}{2}(\cos\theta+1)e^{-i\varphi}|1,1\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\theta\,|1,0\rangle+\frac{1}{2}(1-\cos\theta)e^{i\varphi}|1,-1\rangle}$$

Subito dopo una misura di $\underline{L}\cdot\underline{n}$ avendo trovato il valore $+\hbar$ il sistema si trova nell'autostato $|1,1\rangle_n$, effettuando una misura di L_z la probabilità di ottenere il valore $+\hbar$ è data dal modulo quadro del coefficiente di $|1,1\rangle$

$$\Rightarrow\quad P(L_z=+\hbar)=\left|\frac{1}{2}(\cos\theta+1)e^{-i\varphi}\right|=\frac{1}{4}(\cos\theta+1)^2$$

~~Esercizio~~

La funzione d'onda di una particella ha la forma seguente

$$\psi(x,y,z) = A\, x y\, f(r) \qquad (r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

essendo A il fattore di normalizzazione.
Calcolare i possibili risultati di una misura di L^2 e di L_z con le rispettive probabilità.

Introduciamo subito le coordinate sferiche, in tal modo la f.d.o. diventa

$$\psi(r,\theta,\varphi) = A\, r^2 f(r) \operatorname{sen}^2\theta \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi = A\, g(r) \operatorname{sen}^2\theta \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi$$

Risulta ora $\psi(r,\theta,\varphi) = A\, g(r)\, Y(\theta,\varphi)$

Sappiamo [redacted] che l'azione di L^2 e di L_z non modifica la parte radiale della f.d.o. e perciò analizzeremo solo la dipendenza angolare. $Y(\theta,\varphi) = B \operatorname{sen}^2\theta \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi$ dove B è una nuova costante di normalizzazione. Ora nell'ambito delle funzioni in θ e φ, le autofunzioni di L^2 e di L_z, note col nome di ARMONICHE SFERICHE formano una base ortonormale, ciascuna di esse fissa l'autovalore di L^2 (l) e quello di L_z (m) come segue

$$L^2\, Y_l^m(\theta,\varphi) = l(l+1)\hbar^2\, Y_l^m(\theta,\varphi)$$

$$L_z\, Y_l^m(\theta,\varphi) = m\hbar\, Y_l^m(\theta,\varphi)$$

Scriveremo pertanto $Y(\theta,\varphi)$ come combinazione lineare di armoniche sferiche

$$Y(\theta,\varphi) = B \operatorname{sen}^2\theta \left(\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\right)\left(\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}\right) = B\,\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{4i}\left(e^{2i\varphi}-1+1-e^{-2i\varphi}\right) =$$

$$= B\left[\frac{\sin^2\theta}{4i} e^{2i\varphi} - \frac{\sin^2\theta}{4i} e^{-2i\varphi}\right] = B\left[c_1 Y_2^{2}(\theta,\varphi) + c_2 Y_2^{-2}(\theta,\varphi)\right] =$$

$$= B\left[c_1\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\, e^{2i\varphi} + c_2\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\, e^{-2i\varphi}\right]$$

$$\Rightarrow \quad c_1 = \frac{1}{4i}\sqrt{\frac{32\pi}{15}} \qquad\qquad c_2 = -\frac{1}{4i}\sqrt{\frac{32\pi}{15}}$$

normalizzazione $|B|^2(|c_1|^2+|c_2|^2) = |B|^2\frac{4\pi}{15} = 1 \quad \Rightarrow B = \sqrt{\frac{15}{4\pi}}$

$$\Rightarrow \quad Y(\theta,\varphi) = \underbrace{\cancel{\frac{1}{i}}}_{\text{FASE}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}Y_2^{2}(\theta,\varphi) - \frac{\sqrt{2}}{2}Y_2^{-2}(\theta,\varphi)\right)$$

La particella si trova dunque in un autostato di L^2 con autovalore $6\hbar^2$ ($\ell=2$) cioè una misura di tale grandezza fornisce tale risultato con certezza

I risultati di una possibile misura di L_z sono $+2\hbar$ e $-2\hbar$ ciascuno con probabilità $\frac{1}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

Esercizio (FALCIONI)

Al tempo $t=0$ la f.d.o. di una particella di spin zero è

$$\psi(\vec{r}, t=0) = \frac{f(r)}{\sqrt{8\pi}}\left(1 + \frac{x+iy+z}{r}\right) \qquad \text{con } \int_0^\infty r^2 |f(r)|^2 dr = 1$$

si chiede:

1) quali risultati si possono ottenere facendo una misura di L_z e di L^2 e con quali probabilità

2) Supponendo che l'operatore hamiltoniano sia $H = g L_z$ con g costante si scrive la f.d.o. al tempo $t>0$

3) Calcolare in funzione del tempo i valori medi di L_x, L_y, L_z.

La f.d.o. allo stato iniziale è scritta sia in coordinate cartesiane che sferiche, la riscriviamo usando coordinate sferiche

$$\psi(r,\theta,\varphi,t=0) = \frac{f(r)}{\sqrt{8\pi}}\left(1 + \frac{\cancel{r}\operatorname{sen}\theta\cos\varphi + i\cancel{r}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi + \cancel{r}\cos\theta}{\cancel{r}}\right) =$$

$$= \frac{f(r)}{\sqrt{8\pi}}\left[1 + \operatorname{sen}\theta\left(\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\right) + \cancel{i}\operatorname{sen}\theta\left(\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2\cancel{i}}\right) + \cos\theta\right] =$$

$$= f(r)\left[\frac{1}{\sqrt{8\pi}} + \frac{\operatorname{sen}\theta\, e^{i\varphi}}{2\sqrt{8\pi}} + \cancel{\frac{\operatorname{sen}\theta}{2\sqrt{8\pi}} e^{-i\varphi}} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{2\sqrt{8\pi}} e^{i\varphi} - \cancel{\frac{\operatorname{sen}\theta}{2\sqrt{8\pi}} e^{-i\varphi}} + \frac{\cos\theta}{\sqrt{8\pi}}\right] =$$

$$= f(r)\left[\frac{1}{\sqrt{8\pi}} + \frac{1}{\sqrt{8\pi}}\operatorname{sen}\theta\, e^{i\varphi} + \frac{1}{\sqrt{8\pi}}\cos\theta\right]$$

Scrivo ora la parte angolare come combinazione di armoniche sferiche

$$Y(\theta,\varphi) = c_0 Y_0^0 + c_1 Y_1^1 + c_2 Y_1^0 =$$

$$= c_0 \frac{1}{\sqrt{4\pi}} - c_1 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8\pi}}\operatorname{sen}\theta\, e^{i\varphi} + c_2 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4\pi}}\cos\theta$$

$\Rightarrow$ uguagliando i coefficienti si ha

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad c_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad c_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Controllo ora se la normalizzazione è esatta

$$|c_0|^2+|c_1|^2+|c_2|^2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6} = 1$$

$$\psi(r,\theta,\varphi,t=0) = f(r)\, Y(\theta,\varphi) \quad \Rightarrow \quad \int d\Omega\, Y^*(\theta,\varphi) Y(\theta,\varphi) = 1$$

la f.d.o. di partenza era già normalizzata

Quindi $\psi(r,\theta,\varphi,t=0) = f(r)\left[\frac{1}{\sqrt{2}} Y_0^0(\theta,\varphi) - \frac{1}{\sqrt{3}} Y_1^1(\theta,\varphi) + \frac{1}{\sqrt{6}} Y_1^0(\theta,\varphi)\right]$

$\Rightarrow$ possibili risultati di una misura di L_z sono allora

$m=0$ con probabilità $|c_0|^2+|c_2|^2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{6} = 2/3$

$m=\hbar$ con probabilità $1/3$

I possibili risultati di una misura di L^2 sono invece

0 $(\ell=0)$ con probabilità $1/2$

$2\hbar^2$ $(\ell=1)$ con probabilità $\frac{1}{2} = \frac{1}{3}+\frac{1}{6}$

2) Per determinare l'evoluzione temporale dobbiamo scrivere $\psi(r,\theta,\varphi,t=0)$ in termini di autofunzioni di H, cioè dato che $H=gL_z$ in termini di autofunzioni di L_z (che sono poi le armoniche sferiche) e questo lo abbiamo già fatto.

Calcoliamo quindi gli autovalori di H

$$H Y_0^0 = gL_z Y_0^0 = 0 \qquad E_0 = 0$$

$$H Y_1^1 = gL_z Y_1^1 = (g\hbar) Y_1^1 \qquad E_1 = g\hbar$$

$$H Y_1^0 = gL_z Y_1^0 = 0 \qquad E_2 = 0$$

quindi

$$\psi(r,\theta,\varphi;t) = f(r)\left[\frac{1}{\sqrt{2}} Y_0^0 e^{-iE_0 t/\hbar} - \frac{1}{\sqrt{3}} Y_1^1 e^{-iE_1 t/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{6}} Y_1^0 e^{-iE_2 t/\hbar}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi(r,\theta,\varphi;t) = f(r)\left[\frac{1}{\sqrt{2}}Y_0^0(\theta,\varphi) - \frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^1(\theta,\varphi)e^{-igt} + \frac{1}{\sqrt{6}}Y_1^0(\theta,\varphi)\right]$$

3) $\langle L_z\rangle_t = \sum_i m_i |c_i|^2 = \hbar\left|\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-igt}\right|^2 = \frac{\hbar}{3} = 0\cdot\frac{1}{2} + \hbar\left|-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-igt}\right|^2 + 0\cdot\frac{1}{6}$

Sappiamo inoltre che $L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)$ e $L_y = \frac{1}{2i}(L_+ - L_-)$ quindi

$$\langle L_x\rangle_t = \left\langle f^*(r)\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}Y_{0,0}^* - \frac{1}{\sqrt{3}}Y_{1,1}^* e^{igt} + \frac{1}{\sqrt{6}}Y_{1,0}^*\right\}\right| \frac{L_+ + L_-}{2} \left| f(r)\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}Y_{0,0} - \frac{1}{\sqrt{3}}Y_{1,1}e^{-igt} + \frac{1}{\sqrt{6}}Y_{1,0}\right\}\right\rangle =$$

$L_+ Y_{0,0} = 0$

$L_+ Y_{1,1} = 0$

$L_+ Y_{1,0} = \hbar\sqrt{2}\,Y_{1,1}$

$L_- Y_{0,0} = 0$

$L_- Y_{1,1} = \sqrt{2}\,\hbar\, Y_{1,0}$

$L_- Y_{1,0} = 0$

$$= \frac{1}{2}\left\langle f^*(r)\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}Y_{0,0}^* - \frac{1}{\sqrt{3}}Y_{1,1}^* e^{igt} + \frac{1}{\sqrt{6}}Y_{1,0}^*\right\}\right| f(r)\left\{\hbar\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}Y_{1,1} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\hbar\, e^{-igt}Y_{1,0}\right\}\right\rangle =$$

sfruttando il fatto che $\int_0^\infty dr\, f^*(r) f(r) = 1$ e l'ortonormalità delle $Y_{l,m}^{(\theta,\varphi)}$

$$= \frac{1}{2}\hbar\left[-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}\sqrt{3}}e^{igt} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}\sqrt{3}}e^{-igt}\right] = -\frac{\hbar}{3}\cos gt$$

Analogamente si ottiene $\langle L_y\rangle_t = -\frac{\hbar}{3}\sin gt$

Esercizio (FALCIONI)

Si consideri un OSCILLATORE TRIDIMENSIONALE ISOTROPO descritto dall'hamiltoniana
$$H = \frac{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2+y^2+z^2)$$

1) Determinare autovalori ed autofunzioni di H

2) Determinare le combinazioni lineari delle autofunzioni dell'energia nella rappresentazione (n_x, n_y, n_z) che descrivono stati di momento angolare definito, per i primi 3 livelli

---

1) $H = H_x + H_y + H_z$

Uno stato sarà individuato da $|n_x\rangle|n_y\rangle|n_z\rangle$ possiamo scrivere l'energia di questo stato sapendo che $|n_x\rangle \Rightarrow E_x = \hbar\omega(n_x + \frac{1}{2})$ e analogamente per gli altri $\Rightarrow$ l'energia associata allo stato $|n_x\rangle|n_y\rangle|n_z\rangle$ sarà $E = \hbar\omega(n_x+n_y+n_z+3/2)$

cioè $E = E_x + E_y + E_z$ perché H è separata

N.B $\Rightarrow$ Tutti gli stati tali che $n_x + n_y + n_z = n$ hanno tutti la stessa energia sono quindi <u>degeneri</u> e si può dimostrare che il grado di degenerazione è $g_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Inoltre le autofunzioni saranno il prodotto di quelle degli oscillatori unidimensionali lungo gli assi

$$\psi_n(x,y,z) = \psi_{n_x}(x)\, \psi_{n_y}(y)\, \psi_{n_z}(z)$$

Come eliminare la degenerazione degli autovalori di H?
Bisogna introdurre operatori che commutano con H

Sappiamo ora che $[H, L_x] = [H, L_y] = [H, L_z] = 0$:
ciò deriva dal fatto che H è invariante per rotazioni
inoltre dal fatto che $[L^2, L_x] = [L^2, L_y] = [L^2, L_z] = 0$
scegliamo gli operatori $\{H, L^2, L_z\}$ e quindi la nuova
base $|n, l, m\rangle$

Scriviamo lo stato fondamentale del nostro oscillatore

$$|0\rangle|0\rangle|0\rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \cdot \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}y^2} \cdot \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}z^2} =$$

$$= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2+y^2+z^2)} \underset{\substack{\text{COORD.}\\ \text{SFERICHE}}}{=} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2} \underset{\text{CHIAMO}}{\equiv} U_0(r)$$

Che momento angolare ha quest'oggetto? Zero perché la parte angolare (costante) è proporzionale a Y_0^0 = costante, in altro modo lo stato fondamentale è quello che ha en. minima e momento angolare zero.

$$\Rightarrow \boxed{|0\rangle|0\rangle|0\rangle = |n=0, l=0, m=0\rangle} \quad \text{STATO FONDAMENTALE}$$

Vediamo il 1° livello eccitato, gli stati di eccitazione sono 3 distinti ma hanno tutti la stessa energia $(n=1)$

$$|1\rangle|0\rangle|0\rangle = U_0(r)\sqrt{2}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x \quad \text{1° polinomio di Hermite lungo } x$$

$$|0\rangle|1\rangle|0\rangle = U_0(r)\sqrt{2}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, y$$

$$|0\rangle|0\rangle|1\rangle = U_0(r)\sqrt{2}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, z$$

passo in coordinate SFERICHE

$$|1\rangle|0\rangle|0\rangle = \left(U_0(r)\sqrt{2}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, r\right) \operatorname{sen}\theta\cos\varphi = F_1(r)\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{2} e^{i\varphi} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{2} e^{-i\varphi}\right)$$

$$|0\rangle|1\rangle|0\rangle = U_0(r)\sqrt{2}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi = F_1(r)\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{2i} e^{i\varphi} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{2i} e^{-i\varphi}\right)$$

$$|0\rangle|0\rangle|1\rangle = U_0(r)\sqrt{2}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, r\cos\theta = F_1(r)\cos\theta$$

combiniamo ora $|1\rangle|0\rangle|0\rangle$ e $|0\rangle|1\rangle|0\rangle$

$F_1(r)$ è la parte radiale e dipende da $n=1$

ora $|1\rangle|0\rangle|0\rangle + i|0\rangle|1\rangle|0\rangle = F_1(r)\, \mathrm{sen}\theta\, e^{i\varphi}$

$\Rightarrow |n=1, \ell=1, m=1\rangle \propto |1\rangle|0\rangle|0\rangle + i|0\rangle|1\rangle|0\rangle$ se normalizzo

si ottiene $|n=1, \ell=1, m=1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1,0,0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|0,1,0\rangle$

analogamente se si prende il segno meno si ottiene l'altra combinazione che da $|n=1, \ell=1, m=-1\rangle$

mentre risulta proprio $|0\rangle|0\rangle|1\rangle = |n=1, \ell=1, m=0\rangle$

Quindi

$$\boxed{\begin{aligned} |n=1, \ell=1, m=1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|1,0,0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|0,1,0\rangle \\ |n=1, \ell=1, m=-1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|1,0,0\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|0,1,0\rangle \\ |n=1, \ell=1, m=0\rangle &= |0,0,1\rangle \end{aligned}}$$

1° STATO ECCITATO

Facciamo ora la stessa cosa per il 2° livello eccitato $\boxed{n=2}$

si hanno quindi 6 stati possibili

$|2\rangle|0\rangle|0\rangle$ (2 eccitazioni lungo x e niente lungo y e z)

$|2\rangle|0\rangle|0\rangle = U_0(r)\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha r^2 \mathrm{sen}^2\theta \cos^2\varphi - 1)$ $\qquad \alpha = \frac{2m\omega}{\hbar}$

$|0\rangle|2\rangle|0\rangle = U_0(r)\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha r^2 \mathrm{sen}^2\theta\, \mathrm{sen}^2\varphi - 1)$

$|0\rangle|0\rangle|2\rangle = U_0(r)\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha r^2 \cos^2\theta - 1)$

$|1\rangle|1\rangle|0\rangle = U_0(r)\, \alpha r^2 \mathrm{sen}^2\theta \cos\varphi\, \mathrm{sen}\varphi$

$|1\rangle|0\rangle|1\rangle = U_0(r)\, \alpha r^2 \mathrm{sen}\theta \cos\varphi \cos\theta$

$|0\rangle|1\rangle|1\rangle = U_0(r)\, \alpha r^2 \mathrm{sen}\theta \cos\theta\, \mathrm{sen}\varphi$

questi sono stati dati da Falciani a lezione

$$|n=2,\ \ell=2,\ m=2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left\{|2,0,0\rangle - |0,2,0\rangle + 2i\,|1,1,0\rangle\right\}$$

$$|n=2,\ \ell=2,\ m=-2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left\{|2,0,0\rangle - |0,2,0\rangle - 2i\,|1,1,0\rangle\right\}$$

$$|n=2,\ \ell=2,\ m=1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|1,0,1\rangle + i\,|0,1,1\rangle\right\}$$

$$|n=2,\ \ell=2,\ m=-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|1,0,1\rangle - i\,|0,1,1\rangle\right\}$$

$$|n=2,\ \ell=2,\ m=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left\{2|0,0,2\rangle - |2,0,0\rangle - |0,2,0\rangle\right\}$$

$$|n=2,\ \ell=0,\ m=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{|0,0,2\rangle + |0,2,0\rangle + |2,0,0\rangle\right\}$$

Esercizio (FALCIONI)

L'hamiltoniana di un rotatore sferico quantistico dotato di momento di inerzia I è $H = \frac{L^2}{2I} + \mu B L_z$

La f.d.o. del sistema al tempo $t=0$ è $\psi(\theta,\varphi) = A(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\varphi)$

Determinare in funzione del tempo il valor medio di L_x e la probabilità che facendo una misura al tempo $t>0$ si ottenga $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3}{4}\pi$ e $-\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}$

Dobbiamo riconoscere il contenuto delle armoniche sferiche nella f.d.o. dello stato iniziale.

$$\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\varphi = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta\frac{e^{i\varphi}}{2} + \operatorname{sen}\theta\frac{e^{-i\varphi}}{2} = c_0 Y_{1,0} + c_1 Y_{1,-1} + c_2 Y_{1,1} =$$

$$= c_0\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta + c_1\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\operatorname{sen}\theta\, e^{-i\varphi} - c_2\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\operatorname{sen}\theta\, e^{i\varphi}$$

$$\Rightarrow \quad c_0 = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \qquad c_1 = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \qquad c_2 = -\sqrt{\frac{2\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow \psi_0(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\, A\left\{Y_{1,0} + \frac{1}{\sqrt{2}}Y_{1,-1} - \frac{1}{\sqrt{2}}Y_{1,1}\right\}$$

f.d.o. al tempo $t=0$ espressa nelle armoniche sferiche.

ora dobbiamo normalizzare

$$\int d\Omega\, \psi^*(\theta,\varphi)\psi(\theta,\varphi) = \int \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi\, \psi^*(\theta,\varphi)\psi(\theta,\varphi) = 1$$

però invece di eseguire l'integrale sfruttiamo direttamente la proprietà di ORTONORMALITÀ DELLE ARMONICHE SFERICHE

$$\Rightarrow \quad \frac{4\pi}{3}|A|^2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 1 \qquad \Rightarrow |A|^2 = \frac{3}{8}(\pi)^{-1} \quad \Rightarrow |A| = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}$$

poiché A sta davanti a tutta la f.d.o. scegliamo la fase in modo da renderla reale positiva.

$$\Rightarrow \psi(\theta,\varphi,t=0) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\left(\cos\theta + \sin\theta\cos\varphi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} Y_{1,0} + \frac{1}{2} Y_{1,-1} - \frac{1}{2} Y_{1,1}$$

l'ultimo membro ci fornisce lo stato iniziale come combinazione lineare delle armoniche sferiche cioè la base $\{L^2, L_z\}$ in questa base l'hamiltoniana è già diagonale per cui gli AUTOVALORI DI H, sono

$$H Y_{1,0} = \frac{L^2}{2I} Y_{1,0} + \mu B L_z Y_{1,0} = \frac{\hbar^2}{I} Y_{1,0} \quad \Rightarrow \quad E_0 = \frac{\hbar^2}{I}$$

$$H Y_{1,-1} = \frac{L^2}{2I} Y_{1,-1} + \mu B L_z Y_{1,-1} = \left(\frac{\hbar^2}{I} - \hbar\mu B\right) Y_{1,-1} \quad \Rightarrow \quad E_- = \frac{\hbar^2}{I} - \mu B\hbar$$

$$H Y_{1,1} = \frac{L^2}{2I} Y_{1,1} + \mu B L_z Y_{1,1} = \left(\frac{\hbar^2}{I} + \hbar\mu B\right) Y_{1,1} \quad \Rightarrow \quad E_+ = \frac{\hbar^2}{I} + \mu B\hbar$$

$$\Rightarrow \psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-iE_0 t/\hbar} Y_{1,0} + \frac{1}{2} e^{-iE_- t/\hbar} Y_{1,-1} - \frac{1}{2} e^{-iE_+ t/\hbar} Y_{1,1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-it\hbar/I} Y_{1,0} + \frac{1}{2} e^{-i\left(\frac{\hbar}{I} - \mu B\right)t} Y_{1,-1} - \frac{1}{2} e^{-i\left(\frac{\hbar}{I} + \mu B\right)t} Y_{1,1} \Rightarrow$$

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} Y_{1,0} + \frac{1}{2} e^{+i\mu B t} Y_{1,-1} - \frac{1}{2} e^{-i\mu B t} Y_{1,1}$$

Scriviamo ora il valor medio di L_x al tempo t ricordando che $L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)$

$$\langle \psi(t)|L_x|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}\langle \psi(t)|L_+ + L_-|\frac{1}{\sqrt{2}} Y_{1,0} + \frac{1}{2} e^{+i\mu B t} Y_{1,-1} - \frac{1}{2} e^{-i\mu B t} Y_{1,1}\rangle$$

$$L_+ Y_{1,0} = \hbar\sqrt{2}\, Y_{1,1} \qquad L_- Y_{1,0} = \hbar\sqrt{2}\, Y_{1,-1}$$

$$L_+ Y_{1,-1} = \hbar\sqrt{2}\, Y_{1,0} \qquad L_- Y_{1,-1} = 0$$

$$L_+ Y_{1,1} = 0 \qquad L_- Y_{1,1} = \hbar\sqrt{2}\, Y_{1,0}$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \langle \psi(t)|L_x|\psi(t)\rangle = \frac{1}{8}\langle \frac{2}{\sqrt{2}}Y^*_{1,0} + e^{-i\mu Bt}Y^*_{1,-1} - e^{i\mu Bt}Y^*_{1,1} \,|\, 2\hbar Y_{1,1} + \sqrt{2}\hbar\, e^{i\mu Bt}Y_{1,0} + 2\hbar Y_{1,-1} - \sqrt{2}\hbar\, e^{-i\mu Bt}Y_{1,0}\rangle$$

sfruttando nuovamente l'ortonormalità delle armoniche sferiche

$$\Rightarrow \langle L_x\rangle_t = \frac{\hbar}{8}\left(2e^{i\mu Bt} - 2e^{-i\mu Bt} + 2e^{-i\mu Bt} - 2e^{i\mu Bt}\right) = 0$$

N.B. il valor medio di L_x in genere NON è conservato perché L_x non commuta con H, in questo caso è venuto zero perché il valor medio è stato calcolato su un particolare stato. Se invece il valor medio di un operatore è zero su qualunque stato allora si conserva.

Veniamo ora all'ultima domanda

$$P_t\left(\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3}{4}\pi,\ -\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}\right) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\ \psi^*(t)\psi^*(t)$$

Riscriviamo $\psi(t)$ in termini delle armoniche sferiche

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}Y_{1,0} + \frac{1}{2}e^{i\mu Bt}Y_{1,-1} - \frac{1}{2}e^{-i\mu Bt}Y_{1,1} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\left(\cos\theta + \frac{\operatorname{sen}\theta}{2}\left(e^{i(\mu Bt-\varphi)} + e^{-i(\mu Bt-\varphi)}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\left(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cos(\mu Bt-\varphi)\right) \qquad \text{sia ora } \omega = \mu B$$

$$\Rightarrow \psi(t) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\left[\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cos(\varphi-\omega t)\right]$$

Quindi $P(\theta,\varphi) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\left(\cos^2\theta + \operatorname{sen}2\theta\cos(\varphi-\omega t) + \operatorname{sen}^2\theta\cos^2(\varphi-\omega t)\right)$

$$= \frac{3}{8\pi}\left[\int_{1/\sqrt{2}}^{-1/\sqrt{2}} -d(\cos\theta)\cos^2\theta \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi + \int_{1/\sqrt{2}}^{-1/\sqrt{2}} -d(\cos\theta)\, 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \int_{\pi} \cos(\varphi-\omega t) + \int_{1/\sqrt{2}}^{-1/\sqrt{2}} \cdots \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi/4} \cdots\right]$$

continua a pag 77b

$$= \frac{3}{8\pi}\left[\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} y^2\,dy\,\frac{\pi}{2} + \cancel{\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy\; 2\left(\pm\sqrt{1-y^2}\right) y \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\, \cos(\varphi-\omega t)} + \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy\,(1-y^2)\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(\varphi-\omega t)\,d\varphi\right]$$

zero xchè fa f.ne dispari su intervallo simmetrico

$$= \frac{3}{8\pi}\left[\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{3\sqrt{2}}\right] + \frac{3}{8\pi}\left[-\frac{2}{6\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cos(2\omega t)\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{16\sqrt{2}} - \frac{1}{32\sqrt{2}} - \frac{1}{16\sqrt{2}\,\pi}\cos(2\omega t)$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{P\left(\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{3\pi}{4};\ -\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{\pi}{4};\ t>0\right) = \frac{1}{16\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\cos(2\omega t)\right)}$$

Esercizio (FALCIONI)

Un rotatore quantistico con momento di inerzia I e momento magnetico $\vec{\mu} = g\vec{L}$ si trova in un campo magnetico $\vec{B}$ costante diretto lungo l'asse y [$\vec{B}$ = costante = (0, B, 0)]. L'hamiltoniana del sistema è $H = \frac{L^2}{2I} - \vec{\mu}\cdot\vec{B}$. Al tempo t=0 sono stati misurati simultaneamente L^2 ed L_z trovando rispettivamente i valori $2\hbar^2$ e zero. Determinare:

1) la f.d.o. al tempo t>0 (cioè $\psi(t>0)$)

2) il valor medio dell'hamiltoniana

3) se e per quali valori di t il sistema si troverà in un autostato di L_x e con quale autovalore.

L'hamiltoniana è quindi $H = \frac{L^2}{2I} - gBL_y$

Al tempo t=0 $\psi(\theta,\varphi,t=0) = Y_{1,0}(\theta,\varphi)$ perché la condizione che descrive lo stato iniziale è $\ell=1$, $m=0$ $\Rightarrow$ cioè il sistema si trova inizialmente in un autostato di L^2 ed L_z

$|\psi\rangle_0 = |1,0\rangle$ Tuttavia $|1,0\rangle$ non è autostato di H

Bisogna portarsi nella base in H è diagonale cioè nella base in cui è diagonale sia L^2 che L_y, infatti H ha come autofunzioni gli autostati di L^2 ed L_y.

Scrivo quindi $|1,0\rangle$ (autostato di L^2 ed L_z) come combinazione di autostati di L^2 ed L_y

$|1,0\rangle = \alpha|1,1\rangle_y + \beta|1,0\rangle_y + \gamma|1,-1\rangle_y$

N.B. uso relazioni che esprimono (nel caso $\ell=1$) gli autoket di L^2 ed L_y come combinazione lineare degli autoket di L^2 ed L_z

Scrivo ora $|\psi(t)\rangle$ come combinazione di autostati di L^2 ed L_y

$$|\psi(t)\rangle = \alpha\,|1,1\rangle_y + \beta\,|1,0\rangle_y + \gamma\,|1,-1\rangle_y \Rightarrow$$

$$\alpha = {}_y\langle 1,1|\psi(t)\rangle = -\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-i\epsilon t} - \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{i\epsilon t}$$

$$\beta = {}_y\langle 1,0|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}e^{-i\epsilon t} - \frac{1}{2}e^{i\epsilon t}$$

$$\gamma = {}_y\langle 1,-1|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-i\epsilon t} + \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{i\epsilon t}$$

$$\Rightarrow |\psi(t)\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\epsilon t\,|1,1\rangle_y - i\,\mathrm{sen}\,\epsilon t\,|1,0\rangle_y - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\epsilon t\,|1,-1\rangle_y$$

$$\Rightarrow |\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\epsilon t)\,|1,1\rangle_y + i\,\mathrm{sen}(\epsilon t)\,|1,0\rangle_y + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\epsilon t)\,|1,-1\rangle_y$$

quindi il sistema si troverà in un autostato di L_y con autovalore zero quando $\cos\epsilon t = 0 \Rightarrow \epsilon t = \frac{\pi}{2}(2n+1)$

$\Rightarrow$ il 1° tempo per cui accade è $t^* = \frac{\pi}{2\epsilon}$ $(n=1)$

$$\alpha = {}_y\langle 1,1|1,0\rangle = \left(\frac{1}{2}\langle 1,1| \underset{\text{BRA}}{-} i\frac{\sqrt{2}}{2}\langle 1,0| - \frac{1}{2}\langle 1,-1|\right)|1,0\rangle = -i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\beta = {}_y\langle 1,0|1,0\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1,1| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1,-1|\right)|1,0\rangle = 0$$

$$\gamma = {}_y\langle 1,-1|1,0\rangle = \left(\frac{1}{2}\langle 1,1| \underset{\text{BRA}}{+} i\frac{\sqrt{2}}{2}\langle 1,0| - \frac{1}{2}\langle 1,-1|\right)|1,0\rangle = i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad |1,0\rangle = -i\frac{\sqrt{2}}{2}|1,1\rangle_y + i\frac{\sqrt{2}}{2}|1,-1\rangle_y$$

$$\Rightarrow \quad |\psi(\theta,\varphi,t=0)\rangle = |1,0\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}|1,1\rangle_y - \frac{\sqrt{2}}{2}|1,-1\rangle_y$$

gli autovalori di H sono

$$\begin{cases} H|1,1\rangle_y = \left(\frac{\hbar^2}{I} - gB\hbar\right)|1,1\rangle_y & \Rightarrow \quad E_+ = \frac{\hbar^2}{I} - gB\hbar \\ H|1,-1\rangle_y = \left(\frac{\hbar^2}{I} + gB\hbar\right)|1,-1\rangle_y & \Rightarrow \quad E_- = \frac{\hbar^2}{I} + gB\hbar \end{cases}$$

Possiamo scrivere ora l'evoluzione temporale

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\left(\frac{\hbar^2}{I} - gB\hbar\right)\frac{t}{\hbar}}|1,1\rangle_y - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\left(\frac{\hbar^2}{I} + gB\hbar\right)\frac{t}{\hbar}}|1,-1\rangle_y$$

$$\Rightarrow |\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{igBt}|1,1\rangle_y - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-igBt}|1,-1\rangle_y$$

2) $$\langle H\rangle = \frac{1}{2}E_+ + \frac{1}{2}E_- = \frac{1}{2}\frac{\hbar^2}{I} \cancel{-\frac{1}{2}gB\hbar} + \frac{1}{2}\frac{\hbar^2}{I} + \cancel{\frac{1}{2}gB\hbar} = \frac{\hbar^2}{I}$$

3) Scrivo $|\psi\rangle_t$ come combinazione di autostati di L^2 ed L_x

Inizio con lo scrivere $$|\psi\rangle_t = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{igBt}|1,1\rangle_y - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-igBt}|1,-1\rangle_y =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{igBt}\left(\frac{1}{2}|1,1\rangle + i\frac{\sqrt{2}}{2}|1,0\rangle - \frac{1}{2}|1,-1\rangle\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-igBt}\left(\frac{1}{2}|1,1\rangle + i\frac{\sqrt{2}}{2}|1,0\rangle - \frac{1}{2}|1,-1\rangle\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} e^{igBt} - \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-igBt}\right)|1,1\rangle + \left(\frac{i}{2} e^{igBt} + \frac{i}{2} e^{-igBt}\right)|1,0\rangle + \left(-\frac{e^{igBt}}{2\sqrt{2}} + \frac{e^{-igBt}}{2\sqrt{2}}\right)|1,-1\rangle =$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(gBt)\,|1,1\rangle + i \cos(gBt)\,|1,0\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(gBt)\,|1,-1\rangle$$

$$\Rightarrow |\psi\rangle_t = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(gBt)\,|1,1\rangle + \cos(gBt)\,|1,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(gBt)\,|1,-1\rangle$$

$$|\psi\rangle_t = \tilde{\alpha}\,|1,1\rangle_x + \tilde{\beta}\,|1,0\rangle_x + \tilde{\gamma}\,|1,-1\rangle_x$$

$$\tilde{\alpha} = {}_x\langle 1,1|\psi\rangle_t = \cancel{\frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{sen} gBt} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos gBt - \cancel{\frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{sen} gBt}$$

$$\tilde{\beta} = {}_x\langle 1,0|\psi\rangle_t = \frac{1}{2} \operatorname{sen} gBt + \frac{1}{2} \operatorname{sen} gBt = \operatorname{sen} gBt$$

$$\tilde{\gamma} = {}_x\langle 1,-1|\psi\rangle_t = \cancel{\frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{sen} gBt} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos gBt - \cancel{\frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{sen} gBt}$$

$$\Rightarrow |\psi\rangle_t = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(gBt)\,|1,1\rangle_x + \operatorname{sen} gBt\,|1,0\rangle_x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(gBt)\,|1,-1\rangle_x$$

$\Rightarrow$ $|1,1\rangle_x$ e $|1,-1\rangle_x$ non sono mai autostati del sistema cioè non esiste alcun tempo t t.che una misura di L_x fornisca il valore $+\hbar$ e $-\hbar$

Tuttavia $|1,0\rangle_x$ è un autostato purché $\cos(gBt) = 0$

cioè per $gBt = \frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{\pi}{2}(2n+1)$

Quindi per tutti i tempi t^* tali che $t^* = \frac{\pi}{2} \frac{(1+2n)}{gB}$

la f.d.o. è autofunzione di L_x con autovalore zero

Scriviamo gli autovalori di H

PARTE SPAZIALE $\quad |\varphi\rangle_0 = \alpha|1,1\rangle_x + \beta|1,0\rangle_x + \gamma|1,-1\rangle_x$

$$\alpha = {}_x\langle 1,1|\varphi\rangle_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\beta = 0$$
$$\gamma = {}_x\langle 1,-1|\varphi\rangle_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{|\varphi\rangle_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}|1,1\rangle_x - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}|1,-1\rangle_x}$$

AUTOVALORI PER LA PARTE SPAZIALE

$$\begin{cases} H|1,1\rangle_x = \left(\frac{2\hbar^2}{2mR^2} + \mu B\hbar\right)|1,1\rangle_x \\ H|1,-1\rangle_x = \left(\frac{\hbar^2}{mR^2} - \mu B\hbar\right)|1,-1\rangle_x \end{cases}$$

$$H = H_L + H_S \qquad \text{con} \quad H_S = 2\mu B S_x$$

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\chi_+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\chi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

$$|\chi\rangle_0 = A|+\rangle_x + B|-\rangle_x$$

$$A = {}_x\langle +|\chi_0\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle +| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle -|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$B = {}_x\langle -|\chi_0\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle +| - \frac{1}{\sqrt{2}}\langle -|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{|\chi\rangle_0 = |+\rangle_x}$$

$\Rightarrow$ AUTOVALORI PER LA PARTE DI SPIN

$$H_S|\chi\rangle = 2\mu B S_x|+\rangle_x = \mu B\hbar$$

$$|\psi\rangle_t = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\left(\frac{\hbar^2}{mR^2} + 2\mu B\hbar\right)\frac{t}{\hbar}} |1,1\rangle_x \left|\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right\rangle_x + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\left(\frac{\hbar^2}{2mR^2}\right)\frac{t}{\hbar}} |1,-1\rangle_x \left|\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right\rangle_x$$

$$|\psi\rangle_t = \frac{-1}{\sqrt{2}}|1,-1\rangle_x|+\rangle_x + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i2\mu Bt}|1,1\rangle_x|+\rangle_x$$