Esercizio

Dato un sistema classico (gas) a due dimensioni descritto dall'hamiltoniana $H = \frac{P_x^2 + P_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \left[a(x^2+y^2) + 2bxy \right]$

con a e b costanti fissate ($a > 0$ e $a^2 > b^2$)

Calcolare la funzione di partizione canonica e l'energia media del sistema.

$z^m / N!$?

ATT!! nella soluzione manca $\frac{1}{N!}$ secondo me ci deve essere

numero di dimensioni

$$Z = z^N$$

$$z = \frac{1}{h^2} \int dp_x dp_y \, dx dy \, e^{-\beta H} = \frac{1}{h^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_x dp_y \, dx dy \, e^{-\beta \frac{P_x^2+P_y^2}{2m}} e^{-\beta \frac{m\omega^2}{2} [a(x^2+y^2)+2bxy]} =$$

$$= \frac{1}{h^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta \frac{P_x^2+P_y^2}{2m}} dP_x dP_y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta \frac{m\omega^2}{2} [a(x^2+y^2)+2bxy]} dx dy = \frac{1}{h^2} I_1 \cdot I_2$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta \frac{P_x^2+P_y^2}{2m}} dP_x dP_y = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta \frac{P_x^2}{2m}} dP_x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta \frac{P_y^2}{2m}} dP_y = \sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}} \sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}} = \frac{2m\pi}{\beta}$$

essendo $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}}$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta \frac{m\omega^2}{2} a y^2} dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta \frac{m\omega^2}{2} (ax^2 + 2bxy)} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta \frac{m\omega^2}{2} a y^2} dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left[\overbrace{\left(\beta \frac{m\omega^2 a}{2}\right)}^{A} x^2 + 2 \overbrace{\left(\frac{\beta m \omega^2 b y}{2}\right)}^{B} x \right]} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta \frac{m\omega^2}{2} a y^2} \left(\frac{2\pi}{\beta m \omega^2 a} \right)^{1/2} e^{+\frac{\beta m \omega^2 b^2 y^2}{2a}} dy = \quad \text{essendo} \quad \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(Ax^2+2Bx)} dx = \left(\frac{\pi}{A}\right)^{1/2} e}$$

$$= \left(\frac{2\pi}{a\beta m\omega^2} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2 \frac{\beta m \omega^2 (a^2-b^2)}{2a}} dy =$$

$$= \left(\frac{2\pi}{a\beta m\omega^2} \right)^{1/2} \left(\frac{2\pi a}{\beta m \omega^2 (a^2-b^2)} \right)^{1/2} = \frac{2\pi}{\beta m \omega^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

Quindi $Z = \frac{1}{h^2} I_1 \cdot I_2 = \frac{1}{h^2} \frac{2\pi \cancel{m}}{\beta} \frac{2\pi}{\beta \cancel{m} \omega^2} \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} = \left(\frac{2\pi}{\beta\omega h}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}$

$$\Rightarrow \qquad Z = \left(\frac{2\pi}{\beta\omega h}\right)^{2N} (a^2-b^2)^{-N/2} \Rightarrow \log Z = \log\left(\frac{2\pi}{\omega h}\right)^{2N} (a^2-b^2)^{-N/2} - \log\beta^{2N}$$

$$U = -\frac{\partial}{\partial\beta} \log Z = -\frac{\partial}{\partial\beta}\left\{\log\left(\frac{2\pi}{\omega h}\right)^{2N}(a^2-b^2)^{-N/2} - \log\beta^{2N}\right\} =$$

$$= 0 + 2N\frac{1}{\beta} = 2NKT \qquad \text{avendo } \beta = \frac{1}{\tau} \quad \tau = KT$$

$$\Rightarrow \qquad U = 2NKT$$

Esercizio

Considerati N atomi in un volume V con $H = a p^\ell$ con a e ℓ costanti positive e $p = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{1/2}$, calcolare:

1) la pressione

2) l'energia media

$$\boxed{P = -\frac{\partial F}{\partial V} \qquad F = -KT \log Z \qquad E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z}$$

$$Z = \frac{1}{N!} \int \frac{dp_1 \dots dp_{3N}\, dq_1 \dots dq_{3N}}{h^{3N}} e^{-\beta H}$$

il fattore $\frac{1}{N!}$ tiene conto della indistinguibilità degli atomi $\left(H = \sum_i^N H_i\right)$

$$Z = \frac{1}{N!} \left[\int \frac{dp_1\, dp_2\, dp_3\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, e^{-\beta a p^\ell}}{h^3} \right]^N = \frac{z^N}{N!}$$

$$z = \int \frac{dp_1\, dp_2\, dp_3\, dx_1\, dx_2\, dx_3}{h^3} e^{-\beta a p^\ell} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_1\, dp_2\, dp_3}{h^3} e^{-\beta a p^\ell} \int_V dx_1\, dx_2\, dx_3 =$$

$$= \frac{V}{h^3} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_x\, dp_y\, dp_z\, e^{-\beta a (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{\ell/2}} =$$

$$\boxed{N.B \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dp_x\, dp_y\, dp_z\, e^{-\beta a p^\ell} = \int_0^\infty 4\pi p^2\, dp\, e^{-\beta a p^\ell}}$$

$$= \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty p^2\, dp\, e^{-\beta a p^\ell} =$$

poniamo $p^\ell = x \Rightarrow \ell \log p = \log x$

differenziamo $\frac{\ell\, dp}{p} = \frac{dx}{x}$, (inoltre $p = x^{1/\ell}$)

$$= \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty e^{-a\beta x} p^2 \frac{p}{\ell} \frac{dx}{x} = \int \frac{4\pi V}{\ell h^3} \frac{p^3}{x} e^{-a\beta x} dx =$$

$\frac{p^3}{x} \longrightarrow x^{3/\ell - 1}$

$p = x^{\frac{1}{\ell}} \rightarrow p^3 = x^{\frac{3}{\ell}}$

$$= \frac{4\pi V}{\ell h^3} \int_0^\infty e^{-a\beta x} x^{+3/\ell - 1}$$

$$\boxed{N.B \quad \int_0^\infty e^{-\alpha x} x^{z-1}\, dx = \frac{\Gamma(z)}{\alpha^z} \qquad Re\, \alpha > 0 \quad Re\, z > 0}$$

$$\Rightarrow \quad z = \frac{4\pi V}{\ell h^3} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{\ell}\right)}{a^{3/\ell} \beta^{3/\ell}} = \frac{4\pi V}{\ell h^3} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{\ell}\right)}{a^{3/\ell}} (KT)^{3/\ell}$$

ora $\log Z = \log \frac{z^N}{N!} = N \log z - \log N!$

$$\boxed{\text{FORMULA DI STIRLING} \qquad \log N! = N \log N - N}$$

$$\Rightarrow \log Z = N \log z - N \log N + N \cdot 1 = N \log z - N \log N + N \log e = N \log \frac{z e}{N}$$

$$E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log \left[N \log \frac{e}{N} + N \log z \right] =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \beta} \log \left[N \log \frac{e}{N} + N \log \frac{4\pi V \Gamma(3/\ell)}{a^{3/\ell} \ell h^3} - \frac{3}{\ell} N \log \beta \right] = \frac{3}{\ell} N K T$$

$$F = -KT \log Z$$

$$P = -\frac{\partial F}{\partial V} = KT \frac{\partial \log Z}{\partial V}$$

$$P = KT \frac{\partial}{\partial V} \left[N \log \frac{e}{N} + N \log \frac{4\pi \Gamma(3/\ell)(KT)^{3/\ell}}{\ell a^{3/\ell} h^3} + N \log V \right] = \frac{KNT}{V}$$

$$U = \frac{1}{2} KT \left(2N + 2N \right) =$$

Esercizio

Dati N oscillatori bidimensionali con $H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2)$, calcolare :

1) Z
2) $\overline{E}$
3) la variazione di entropia S a temperatura costante quando $\omega \to \frac{\omega}{2}$

$$\boxed{\overline{E} = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z \qquad F = -KT\log Z \qquad S = -\frac{\partial F}{\partial T}}$$

$Z = z^N$ NON c'è il fattore $\frac{1}{N!}$ perché gli oscillatori sono distinguibili (PER

$$z = \int \frac{dx\,dy\,dp_x\,dp_y\,e^{-\beta H}}{h^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dp_x\, e^{-\beta\frac{p_x^2}{2m}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_y\, e^{-\beta\frac{p_y^2}{2m}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-\beta\frac{m\omega^2}{2}x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{-\beta\frac{m\omega^2}{2}y}$$

$$= \frac{1}{h^2}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2\pi}{m\beta\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2\pi}{m\beta\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{4\pi^2}{\beta^2\omega^2h^2}$$

$$Z = z^N = \left(\frac{4\pi^2}{\beta^2\omega^2h^2}\right)^N$$

$$\overline{E} = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log\left(\frac{4\pi^2}{\beta^2\omega^2h^2}\right)^N = -N\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\log\frac{4\pi^2}{\omega^2h^2} - 2\log\beta\right) = +2KNT$$

Si poteva calcolare, oltre che facendo la derivata di $\log Z$, tenendo conto che ogni termine quadratico di H contribuisce all'energia media per un fattore $\frac{1}{2}KT$, tenendo poi conto che i termini quadratici sono 4 per ciascuno degli N oscillatori $\Rightarrow$ $\overline{E} = 4N\frac{1}{2}KT = 2NKT$

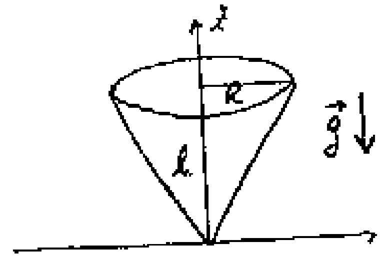
Ricordando che $F = E - TS$ $\Rightarrow$ $S = \frac{E}{T} - \frac{F}{T} = E/T + K\log Z$

$$S(\omega) = \frac{2NKT}{T} + K\log\left(\frac{2\pi}{\beta\omega h}\right)^{2N} = 2NK + 2NK\log\frac{2\pi}{\beta\omega h}$$

$$S\left(\frac{\omega}{2}\right) = 2NK + 2NK\log\frac{2\cdot 2\pi}{\beta\omega h} = 2NK + 2NK\log\frac{2\pi}{\beta\omega h} + 2NK\log 2$$

$$\Rightarrow \quad \Delta S = 2NK\log 2$$

Esercizio (FALCIONI)



Un gas perfetto è racchiuso in un cono di raggio R ed altezza l (vedi figura) ed è in equilibrio alla temperatura T.
Calcolare F, U, ed i limiti per $T \to 0$ e per $T \to \infty$ avendo la seguente hamiltoniana

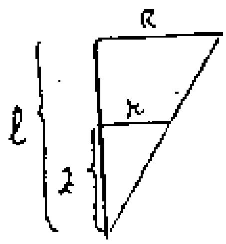
$$H = \frac{p^2}{2m} + mgz$$ con g accelerazione di gravità

$$F = -NKT \log\left(\frac{Z_\beta\, e}{N}\right) \qquad Z_\beta = \frac{1}{h^3}\left(\frac{2m\pi}{\beta}\right)^{3/2}\int_0^l dz\, e^{-mgz\beta}\int_{S(z)} dx\,dy$$

$$Z_\beta = \frac{1}{\lambda^3}\int_{\nabla} dx\,dy\,dz\; e^{-\beta mgz} = \frac{1}{\lambda^3}\int_0^l dz\, e^{-mgz\beta}\int_{S(z)} dx\,dy =$$

$S(z) \to$ la superficie ellittica dell'altezza z in cui si calcola

$$\frac{1}{\lambda^3}\int_0^l e^{-\beta mgz}\,\pi\, r^2(z)\, dz =$$



N.B. $\frac{R}{l} = \frac{r}{z} \Rightarrow r = z\frac{R}{l}$

$$= \frac{1}{\lambda^3}\int_0^l e^{-\beta mgz}\,\pi\, z^2\left(\frac{R}{l}\right)^2 dz =$$

$$= \frac{\pi(R/l)^2}{\lambda^3}\int_0^l dz\; z^2 e^{-\beta mgz} = \frac{\pi(R/l)^2}{\lambda^3}\int_{-mg\beta l}^{0}\frac{y^2}{(\beta mg)^2}\, e^{y}\,\frac{dy}{(\beta mg)} =$$

$= $ avendo posto $-\beta mgz = y$ N.B. $\int y^2 dy\, e^{ay} \neq e^{ay}\left(\frac{y^2}{a} - \frac{2y}{a} + \frac{2}{a}\right) \to$ l'integrale è sbagliato

$$= \frac{\pi(R/l)^2}{(\lambda^3)}\,\frac{2}{\left(\frac{mg}{KT}\right)^3}\left\{1 - e^{-\frac{mgl}{KT}}\left[1 + \left(\frac{mgl}{KT}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{mgl}{KT}\right)^2\right]\right\}$$

$$U = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log\frac{Z_\beta\, e}{N} = N\frac{\partial}{\partial\beta}\left[-\frac{3}{2}\log\beta\right) - 3\log\beta + \log\left(1 - e^{-x}\left(1 + x + \tfrac{1}{2}x^2\right)\right)$$

avendo posto $x = \frac{mgl}{KT}$

$$U = NKT\left\{\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)}\right\}$$

CASO $KT \gg mgl$ $\qquad \frac{mgl}{KT} \to 0$

Al denominatore di U sviluppo e^x, i primi tre termini si cancellano con le quantità tra parentesi tonde, quindi devo prendere il 4° termine dello sviluppo (T molto grande $\Rightarrow$ x molto piccolo):

$$U = NKT\left\{\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{\frac{x^3}{6}}\right\} = \frac{3}{2}NKT$$

CASO $KT \ll mgl$ $\qquad \frac{mgl}{KT} \to \infty$

$U = \frac{9}{2}NKT$ è l'energia di un gas di particelle contenute in un corso di altezza infinita e sottoposte alla gravità

$$\cdot \int z^2 e^{az}\,dz = z^2\cdot\frac{1}{a}e^{az} - \int\frac{2}{a}z\,e^{az}\,dz = z^2\cdot\frac{1}{a}e^{az} - \frac{2}{a}\int z\,e^{az}\,dz$$

$$\cdot \int z\,e^{az}\,dz = z\cdot\frac{1}{a}e^{az} - \int\frac{1}{a}e^{az}\,dz = \frac{z}{a}e^{az} - \frac{1}{a^2}e^{az} = \frac{e^{az}}{a}\left(z-\frac{1}{a}\right)$$

Esercizio

Un gas perfetto classico di N particelle di massa m è soggetto a una forza di richiamo elastica verso il piano $z=0$, $F=-m\omega^2 z$ diretta lungo l'asse z. Il sistema è racchiuso in un cilindro di asse z, infinitamente lungo e di area di base A. Calcolare:

1) Z;

2) F;

3) C_V.

$$V = -\int F = \frac{1}{2} m\omega^2 z^2 \quad F = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\boxed{F = -KT \log Z \qquad U = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z \qquad C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V}$$

1) $Z = z^N$ non c'è il fattore $\frac{1}{N!}$ perché il gas perfetto è classico e quindi le particelle sono distinguibili (secondo me $\frac{1}{N!}$ ci deve essere;)

$$z = \frac{1}{h^3}\int e^{-\beta H} d\vec{p}\, d\vec{q} = \quad \text{tenendo conto che } H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 z^2$$

$$= \frac{1}{h^3}\int_{-\infty}^{+\infty} dp_x\, e^{-\beta p_x^2/2m} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_y\, e^{-\frac{\beta p_y^2}{2m}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z\, e^{-\frac{\beta p_z^2}{2m}} \int_A dx\,dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta\frac{m\omega^2}{2}z^2} dz$$

$$= \frac{1}{h^3}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2} A \left(\frac{2\pi}{m\beta\omega^2}\right)^{1/2} = \frac{4Am\pi^2}{h^3\omega\beta^2}$$

$$Z = z^N = \left(\frac{4Am\pi^2}{h^3\omega\beta^2}\right)^N$$

2) $$F = -KT\log Z = -NKT\log\frac{4Am\pi^2}{h^3\omega\beta^2} = -\frac{N}{\beta}\log\frac{4Am\pi^2}{h^3\omega\beta^2}$$

3) $$U = -\frac{\partial \log Z}{\partial\beta}$$

$$U = -N\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\log\frac{4Am\pi^2}{h^3\omega} - 2\log\beta\right] = +2NKT$$

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = 2NK$$

Esercizio (CASSANDRO)

Si consideri un sistema di N rotatori quantistici distinguibili non interagenti in equilibrio alla temperatura T

$$H = \frac{2\pi}{\hbar} A L^2$$

Determinare: 1) a quale T la probabilità di trovare il rotatore nel livello fondamentale è uguale a quella di trovarlo nel 1° livello eccitato 2) il comportamento del calore specifico in funzione di T nelle vicinanze dello zero assoluto.

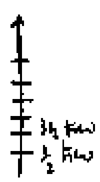
$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 r^2$$

Esercizio (CASSANDRO)

N particelle di spin $\frac{3}{2}$ (fermioni) e di massa m sono sottoposte ad un potenziale armonico $V = \frac{1}{2}kx^2$.
Calcolare l'energia media del sistema a $T=0$ $\left(H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2\right)$

N.B. <u>in ogni livello posso avere $(2S+1)$ particelle</u>, nel nostro caso 4

lo spettro dell'energia è $E_i = \hbar\omega(\cancel{k} + \frac{1}{2})$ con $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$



Dal momento che ho spin $\frac{3}{2}$ in ogni livello posso accomodare 4 particelle, quindi dalla definizione l'energia di Fermi è $\boxed{E_F = \left(\frac{N}{4} + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega}$

le particelle sono tutte incolonnate 4 a 4

$$n(E_i) = \begin{cases} 1 & E_i < E_F \\ 0 & E_i > E_F \end{cases}$$

$$\bar{E} = \sum_{0}^{\infty}{}_i\, E_i\, n(E_i) = \underbrace{\sum_i^{\frac{N}{4}-1} \hbar\omega\, 4}_{}\left(i + \frac{1}{2}\right)$$

OGNI LIVELLO HA 4 PARTICELLE

$\frac{N}{4} - 1$ perché il livello fondamentale è $i = 0$

$$\Rightarrow \bar{E} = 4\hbar\omega\left(\sum_{0}^{\frac{N}{4}-1}{}_i\, i + \frac{1}{2}\sum_i^{\frac{N}{4}-1}\right) = 4\hbar\omega\left(\sum_{1}^{\frac{N}{4}-1}{}_i\, i + \frac{1}{2}\left(\frac{N}{4}\right)\right) =$$

$\frac{N}{4}$ addendi

$$= 4\hbar\omega\left[\left(\sum_{1}^{\frac{N}{4}-1}{}_i\, i\right) + \frac{N}{8}\right]$$

N.B. $\sum_{1}^{k}{}_i\, i = \frac{(k+1)k}{2}$

Energ. media per liv. discreti di energ.

$\bar{E} = \sum_i E_i\, n(E_i)$ $\quad n(E_i) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$

$E_i = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$

$\bar{E} = \sum^{N-1} \ldots$

Esercizio (CASSANDRO)

N fermioni di spin $\frac{1}{2}$ si trovano a $T=0$, ciascun fermione è un oscillatore quantistico lineare in un campo magnetico uniforme B con momento magnetico μ. Gli stati di ogni fermione sono

spin + $\rightarrow$ $E_n^+ = n\hbar\omega - \mu B$

spin − $\rightarrow$ $E_n^- = n\hbar\omega + \mu B$

Calcolare : 1) l'energia di Fermi del sistema

b) la polarizzazione relativa, cioè la quantità $\frac{N^+ - N^-}{N}$ dove N^+ è il numero di fermioni che hanno spin $+\frac{1}{2}$ e analogamente per N^-

---

$S_z = \frac{1}{2}\hbar \Rightarrow E_n^+ = n\hbar\omega - \mu B \qquad S_z = -\frac{1}{2}\hbar \Rightarrow E_n^- = n\hbar\omega + \mu B$

se $B=0$ ho l'esercizio precedente

N.B. in questo caso NON ho degenerazione cioè in ogni livello non accomodano 2 particelle ma con spin antiparalleli che hanno diversa energia a causa della forma dello spettro.

$$E(N,N^+) = \sum_{0}^{N^+-1} i(\hbar\omega i - \mu B) + \sum_{0}^{N^- -1} i(\hbar\omega i + \mu B) = \qquad \text{poiché} \quad N = N^+ + N^-$$

$$= \sum_{0}^{N^+-1} i(\hbar\omega i - \mu B) + \sum_{0}^{N-N^+-1} i(\hbar\omega i + \mu B)$$

Poiché a $T=0$ l'energia media è minima devo trovare l'N^+ che rende minima la seguente espressione

$$E(N,N^+) = \hbar\omega\left(\sum_{0}^{N^+-1} i\right) - N^+\mu B + \hbar\omega\left(\sum_{0}^{N-N^+-1} i\right) + (N-N^+)\mu B =$$

$$= \hbar\omega\,\frac{N^+(N^+-1)}{2} - \mu B N^+ + \hbar\omega\,\frac{(N-N^+)(N-N^+-1)}{2} + (N-N^+)\mu B =$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2}\left(2N^{(+)2} - 2NN^{(+)} + N^2\right) + \left(N - 2N^{(+)}\right)\mu B$$

devo cercare il minimo

$$\frac{dE}{dN^+} = \frac{\hbar\omega}{2}\left(4N^{(+)} - 2N\right) - 2\mu B = 0 \quad \Rightarrow \quad N^+ = \frac{N}{2} + \frac{\mu B}{\hbar\omega}$$

$$N^- = N - N^+ = \frac{N}{2} - \frac{\mu B}{\hbar\omega}$$

$$\mathcal{E}_F^+ = N^+\hbar\omega - \mu B = \frac{N}{2}\hbar\omega$$

$$\mathcal{E}_F^- = N^-\hbar\omega + \mu B = \frac{N}{2}\hbar\omega$$

Esercizio (FALCIONI

Un gas di fermioni di spin $1/2$ in due dimensioni è contenut in un recipiente di lato L alla temperatura di Fermi $T_F = \frac{\varepsilon_F}{K}$

Calcolare : 1) Il potenziale chimico in funzione della temperatura

2) Per quale temperatura metà dei fermioni hanno una energia maggiore dell'energia di Fermi ?

$$N = \underbrace{\sum_s n(\varepsilon_s)}_{\text{lo numero di occupazione dello stato } s} = \underbrace{g}_{\text{fattore di spin}} \int \frac{d\vec{x}\, d\vec{p}}{h^2} \frac{1}{e^{(\varepsilon(\vec{x},\vec{p})-\mu)/kT}+1}$$

$$KT_F = \varepsilon_F \qquad n(\varepsilon_s) = \begin{cases} 0 & \text{per } \varepsilon_s > \mu \\ 1 & \text{per } \varepsilon_s < \mu \end{cases} \quad \text{a } T=0 \quad \mu(0) = \varepsilon_F$$

$$\overset{g(E)}{W(E)} = 2 \int_{\frac{p^2}{2m} \le E} \frac{d\vec{p}\, d\vec{x}}{h^2} = \frac{2L^2}{h^2} \int_{\substack{p_x^2+p_y^2 \le 2mE \\ \text{è l'area di un} \\ \text{cerchio di raggio } \sqrt{2mE}}} d\vec{p} = \frac{2L^2}{h^2} \pi (2mE) = \frac{4\pi L^2}{h^2} mE$$

$$dW(E) = \frac{4\pi L^2}{h^2} m\, dE$$

$$N = W(\varepsilon_F) = \frac{4\pi L^2}{h^2} m \varepsilon_F \Rightarrow \varepsilon_F = \overbrace{\frac{N}{L^2}}^{\rho} \frac{h^2}{4\pi m} = \overset{\text{densità}}{\rho} \frac{h^2}{4\pi m} = kT_F$$

OSS : $\boxed{g \frac{d\vec{x}\, d\vec{p}}{h^2}}$ è il numero degli stati in un volumetto $d\vec{x}\, d\vec{p}$ dello spazio d

fasi

$$N = \int_0^\infty \frac{dW(E)}{e^{\frac{E-\mu}{kT}}+1} = \int_0^\infty dE \frac{\frac{4\pi L^2}{h^2} m}{e^{(E-\mu)/kT}+1} = \left(dW(E) = \frac{4\pi L^2}{h^2} m\, dE \right)$$

$$= \frac{4\pi L^2 m}{h^2} \int_0^\infty \frac{dE}{e^{(E-\mu)/kT}+1} = \left(\text{poniamo } x = \frac{E-\mu}{kT} \right)$$

$$= \frac{4\pi L^2 m}{h^2} kT \int_{-\mu/kT}^\infty \frac{dx}{e^x+1} = \frac{4\pi L^2 m}{h^2} \left[-\log(1+e^{-x}) \right]_{-\mu/kT}^\infty \Rightarrow$$

$$N = \frac{4\pi L^2 m}{h^2} kT \log\left(1 + e^{\mu/kT}\right)$$

OSS · se ci fossimo trovati in 3 dimensioni nell'integrale avrei avuto un termine pari a $\sqrt{E}$ al numeratore

Invertendo la relazione $\quad \left(\frac{h^2 N}{4\pi L^2 m}\right)\frac{1}{kT} = \log\left(1 + e^{\mu/kT}\right)$

$$\Rightarrow \frac{E_F}{kT} = \log\left(1 + e^{\mu/kT}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{T_F}{T} = \log\left(1 + e^{\mu/kT}\right)$$

$$\Rightarrow e^{T_F/T} - 1 = e^{\mu/kT} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu = kT \log\left(e^{T_F/T} - 1\right)}$$

2) $$\frac{N}{2} = \frac{4\pi m L^2}{h^2} \int_{E_F}^{\infty} \frac{dE}{e^{(E-\mu)/kT} + 1} \quad \Rightarrow \quad \left(\int_{E_F}^{\infty} dE(\dots) = kT \int_{\frac{E_F - \mu}{kT}}^{\infty} \frac{dx}{e^x + 1} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \underbrace{\left(\frac{4\pi m L^2}{N h^2}\right)}_{E_F^{-1}} kT \log\left[1 + e^{-(E_F - \mu)/kT}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{E_F} kT \log\left[\dots\right] \quad \Rightarrow \quad \log\left[1 + e^{-(E_F - \mu)/kT}\right] = \frac{1}{2}\frac{E_F}{kT} \qquad (*)$$

Uso ora la relazione trovata in precedenza $e^{\mu/kT} = e^{E_F/kT} - 1$ che riscrivo così:

$$e^{\mu/kT} = e^{E_F/kT}\left(1 - e^{-E_F/kT}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{e^{\mu/kT}}{e^{E_F/kT}} = 1 - e^{-E_F/kT}$$

pongo ora $y = e^{E_F/kT} > 1 \qquad e^{-E_F/kT} = 1/y$

$$\Rightarrow (*) \Rightarrow \log\left[1 + e^{-E_F/kT} \cdot e^{\mu/kT}\right] = \frac{1}{2}\log y$$

$$\Rightarrow \log\left[1 + 1 - e^{-E_F/kT}\right] = \frac{1}{2}\log y \quad \Rightarrow \quad \log\left[2 - \frac{1}{y}\right] = \log y^{1/2}$$

$\Rightarrow 2 - \frac{1}{y} = \sqrt{y}$ una soluzione è $y = 1$ ma non ci interessa in quanto $y > 1$

$$\Rightarrow y^3 - 4y^2 + 4y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (y-1)(y^2 - 3y + 1) = 0$$

$\Rightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ < $2{,}62$; $0{,}38$ DA SCARTARE xchè < 1

$$\Rightarrow 2{,}62 = e^{kT_F/Tk} \quad \Rightarrow \quad \frac{kT_F}{kT} = \log y = \log(2{,}62) \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 1.04\, T_F}$$

Esercizio (FALCIONI)

Gas di particelle di massa m e spin $\frac{1}{2}$ con momento magnetico vincolate a muoversi in un piano dentro un cerchio di raggio R a $T=0$; le particelle non interagiscono ma sono soggette ad un campo magnetico disomogeneo e perpendicolare al piano di modulo $|B| = B_0 \frac{r}{R}$

L'energia di singola particella è $\varepsilon = \frac{p_x^2+p_y^2}{2m} \pm \mu B_0 \frac{r}{R}$

Sapendo che $\varepsilon_F = \mu B_0$ determinare

1) N = (numero totale di particelle)

2) con quale probabilità il momento magnetico di ogni particella è diretto come $\vec{B}$

3) la distanza media dal centro per particelle con momento magnetico antiparallelo a $\vec{B}$

$S = \frac{1}{2}$

$$N = 2\int \frac{d\mathcal{N}(\varepsilon)}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT}+1}$$

$\to 1$ se $T=0$

$$\varepsilon_+ = \frac{p^2}{2m} + \mu B_0 \frac{r}{R}$$

$$\varepsilon_- = \frac{p^2}{2m} \; \mu B_0 \frac{r}{R}$$

N.B.: non considero più a conti il fattore di degenerazione perché ne tiene già conto l'energia

OSS: le particelle si trovano a $T=0$

quindi
$$N_+ = \int\limits_{\frac{p^2}{2m}+\mu B_0\frac{r}{R} \le \varepsilon_F} \frac{d\vec{x}\,d\vec{p}}{h^2} = \frac{1}{h^2} \int\limits_{(0,R)(0,2\pi)} \boxed{r\,dr\,d\varphi} \int\limits_{\frac{p^2}{2m} \le \varepsilon_F - \mu B_0 \frac{r}{R}} d\vec{p} =$$

$$= \frac{2\pi}{h^2} \int_0^R r\,dr \int\limits_{p^2 \le (\varepsilon_F - \mu B_0 \frac{r}{R})2m} d\vec{p} = \frac{2\pi}{h^2} \int_0^R r\,\pi\,2m\left(\varepsilon_F - \mu B_0 \frac{r}{R}\right) dr =$$

$$= \text{tenendo conto che } \varepsilon_F = \mu B_0 = \frac{2\pi}{h^2} \int_0^R r\,\pi\,2m\,\frac{\mu B_0}{R}(R-r)\,dr =$$

$$= \frac{(2\pi)^2}{h^2} \frac{m\mu B_0}{R} \left[R\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right]_0^R = \frac{(2\pi)^2 m\mu B_0}{h^2 R} \frac{R^3}{6}$$

numero di particelle con energia $< \varepsilon_F$

per N_- si ha invece

$$N_- = \int_{\frac{p^2}{2m} - \mu B_0 \frac{r}{R} \leq \epsilon_F} \frac{d\vec{x}\, d\vec{p}}{h^2} = \frac{5}{6} \frac{(2\pi R)^2}{h^2} \mu B_0 m$$

Numero totale $N = N_+ + N_- = \frac{1}{6} \frac{(2\pi R)^2}{h^2} \mu B_0 m + \frac{5}{6} \frac{(2\pi R)^2}{h^2} \mu B_0 m = \frac{(2\pi R)^2}{h^2} \mu B_0 m$

2) $P(\vec{S} /\!/ \vec{B}) = \frac{N_-}{N} = \frac{5}{6}$ probabilità di avere particelle con mom. magnetico // al campo $\vec{B}$

Infatti se l'energia è $E = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} - \mu B_0 \frac{r}{R}$ sto considerando particelle con momento magnetico parallelo al verso del campo $\vec{B}$

3) le particelle con momento antiparallelo a $\vec{B}$ sono le N_+

$$N_+ = \int_0^R dn_+(r) \qquad \text{dove } dn_+(r) = \frac{(2\pi)^2}{h^2} \frac{\mu B_0}{R} r(R-r)\, dr$$

numero di particelle con m. antiparall. a $\vec{B}$ comprese tra r e $r+dr$

la probabilità sarà $dP_+(r) = \frac{dn_+(r)}{N_+}$

Per avere la distanza richiesta devo pesare r con le probabilità $dP(r)$ e poi integrare

$$\overline{r} = \int_0^R dP_+(r)\, r = \int_0^R r \left[\frac{6}{R^3} r(R-r) \right] dr = \frac{R}{2}$$

$\Rightarrow \quad \langle r \rangle = \frac{R}{2}$ distanza media dall'origine di una particella con momento magnetico antiparallelo a $\vec{B}$

Esercizio (FALCIONI)

N bosoni di massa m in d dimensioni sono soggetti al potenziale attrattivo $V(\vec{r}) = \frac{1}{2} m\omega^2 (\vec{r})^2$ $\quad (\vec{r})^2 = \sum_1^d i\, x_i^2$

Nel caso in cui gli oscillatori si possono considerare semiclassici ($\hbar\omega \ll kT$) determinare :

1) la dimensione minima per la quale si ha condensazione di Bose
2) la temperatura critica in funzione di N, $\hbar\omega$, ed eventuali integrali adimensionali
3) Trovare la dipendenza da $\frac{T}{T_c}$ del numero di bosoni nello stato fondamentale

---

$$N = \int_0^\infty \frac{n(\varepsilon)\, d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}$$ lo studio di questa relazione rivela se è presente o no la condensazione

$n(\varepsilon) = \frac{d\,W(\varepsilon)}{d\varepsilon}$ (ASSUMO BOSONI DI SPIN ZERO)

$$W(\varepsilon) = \int_{H \leq \varepsilon} \frac{d\vec{p}\, d\vec{x}}{h^d} = \int_{\frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \vec{x}^2 \leq \varepsilon} \frac{d\vec{p}\, d\vec{x}}{h^d}$$

(introduco le variabili $\vec{p}' = \frac{\vec{p}}{\sqrt{2m}}$ $\quad \vec{x}' = \sqrt{\frac{m\omega^2}{2}}\, \vec{x}$

$\Rightarrow H = (\vec{p}')^2 + (\vec{x}')^2 \qquad dp_i\, dx_i = \frac{2}{\omega} dp'_i\, dx'_i$)

$$= \left(\frac{2}{\omega h}\right)^d \int_{\vec{p}'^2 + \vec{x}'^2 \leq \varepsilon} d\vec{p}'\, d\vec{x}' = \left(\frac{2}{\omega h}\right)^d V_{2d}(\sqrt{\varepsilon})$$

dove $V_{2d}(\sqrt{\varepsilon}) = \frac{\pi^d}{d!} (\sqrt{\varepsilon})^{2d}$ VOLUME DI UNA SFERA IN 2d DIMENSIONI DI RAGGIO $\sqrt{\varepsilon}$

$$\Rightarrow W(\varepsilon) = \frac{1}{d!} \left(\frac{\varepsilon}{\hbar\omega}\right)^d$$

Quindi $$N = \int_0^\infty \frac{n(\varepsilon)\, d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} = \frac{d}{d!} \frac{1}{\hbar\omega} \int_0^\infty \frac{(\varepsilon/\hbar\omega)^{d-1}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} =$$

$$= \frac{d/d!}{(\hbar\omega)^d}\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{d-1}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}-1}\,d\varepsilon = \frac{d/d!}{(\hbar\omega)^d}(kT)^d\int_0^\infty \frac{x^{d-1}}{\frac{1}{z}e^{x}-1} = N$$

avendo posto $\frac{\varepsilon}{kT}=x$ e $e^{-\mu/kT}=\frac{1}{z}$

$\Rightarrow$ Se tengo fissa la temperatura devo aggiustare il potenziale chimico (oppure la z) in modo opportuno per avere N

Osserviamo ora che l'argomento dell'integrale è una funzione CRESCENTE del potenziale chimico $\Rightarrow$ aumentare il numero di particelle $\Rightarrow$ aumentare il potenziale chimico, il potenziale chimico ha però un limite superiore e non può essere maggiore dell'energia minima del sistema, altrimenti il numero delle particelle sarebbe negativo

$$M_s = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_s-\mu)}-1} \qquad \varepsilon_s = \text{energia minima}$$

Quindi quando μ raggiunge il valore massimo ho un massimo per N, dove però N sono le particelle negli stati eccitati se aggiungo altre particelle esse andranno tutte nello stato fondamentale, questo è il fenomeno della condensazione

Il max del potenziale chimico è nel nostro caso $\mu=0$ perché l'energia minima del sistema è $\varepsilon=0$ $\Rightarrow$ $z=1$

Studio quindi l'integrale $\int_0^\infty \frac{x^{d-1}}{e^{x}-1}\,dx = F(1,d)$

Voglio vedere sotto quali condizioni <u>CONVERGE</u> (<u>CONDENSAZIONE</u>)

Quando $d=1$ $\Rightarrow$ $\int_0^\infty \frac{1}{e^x-1}dx$ ove nel limite inferiore la funzione integranda non è limitata e l'integrale diverge e posso sistemare un numero arbitrario di particelle

$d \geq 2$ $\int_0^\infty \frac{x^{d-1}}{e^x-1}dx$ nell'estremo superiore non ho problemi

nell'estremo inferiore l'integrando è $\frac{x^{d-1}}{x(1+o(x))} = \frac{1}{x^{-d+2}(1+o(x))} \sim \frac{1}{x^{2-d}}$

l'integrale converge se $d-2 \geq 0$ cioè se $d \geq 2$

$\Rightarrow$ quindi la dimensione minima necessaria affinché ci sia la condensazione è $d=2$

Risulta inoltre $F(1,d) = \int_0^\infty \frac{x^{d-1}}{e^x-1}dx = \underset{\text{GAMMA}}{\Gamma(d)}\ \underset{\text{ZETA DI RIEMANN}}{\zeta(d)}$

Temperatura critica T_c è quella per la quale vale la relazione

$$\frac{d/d!}{(\hbar\omega)^d}(kT_c)^d \int_0^\infty \frac{x^{d-1}}{e^x-1}dx = N$$ risolvo rispetto a $(kT_c)^d$

$$(kT_c)^d = \frac{N(\hbar\omega)^d}{(d/d!)\,F(1,d)}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_c = \frac{\hbar\omega}{k}\left(\frac{N\,d!}{F(1,d)\,d}\right)^{1/d}}$$

Sia N_0 il numero di particelle nello stato fondamentale

$\Rightarrow$ $N = N_0 + N_e$ $\quad N_e$ = numero particelle negli stati eccitati che sono ben descritte dalla relazione

$$N_e = \frac{d/d!}{(\hbar\omega)^d}(kT)^d\,F(1,d)$$ avendo sostituito il valor max del potenzial chim

$$\Rightarrow \qquad N_e = \frac{d!\,d!}{(\hbar\omega)^d} (kT)^d \frac{T_c^{\,d}}{T_c^{\,d}} F(1,d)$$

$$\Rightarrow \qquad N_e = N \left(\frac{T}{T_c}\right)^d \quad \cdots \quad \text{per} \quad T<T_c$$

quindi il numero di particelle nello stato fondamentale sarà

$$N_0 = N - N_e = N\left(1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^d\right)$$

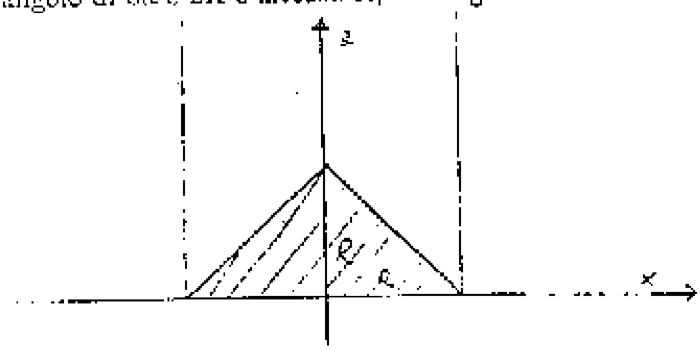
Prova di esonero di Istituzioni di Fisica Teorica
(2 - febbraio 1996)

1) Cosideriamo due sfere concentriche, quella esterna di raggio R e quella interna di raggio variabile ρ Nel sistema sono contenute N particelle non interagenti di massa m, N_1 nella corona sferica e N_2 nella sfera interna. L' hamiltoniana sí singola particella è:

$$\frac{1}{2m}|\mathbf{p}|^2 + A|\mathbf{r}|^3,$$

dove $A > 0$. Sapendo che il sistema si comporta come un gas classico in equilibrio alla temperatura T determinare ρ in modo che sulla superfice della sfera interna ci sia equilibrio meccanico.

2) Si consideri un gas di particelle non interagenti di spin 1/2 e massa m racchiuso nel seguente dominio bidimensionale: un rettangolo di base $2R$ e altezza infinita da cui è stato tolto un triangolo di base $2R$ e altezza R, vedi figura



L'hamiltoniana di singola particella è:

$$\frac{1}{2m}(p_x^2 + p_z^2) + mgz$$

Sapendo che il sistema è all'equilibrio allo zero assoluto e che nessuna particella supera la
$< R$ quota R. determinare:
a)il numero massimo, N_{max}, di particelle che possono essere contenute nel sistema;
b) il valore medio di z quando il sistema contiene N_{max} particelle. $N = N_{MAX}$

Soluzione esercizio 1

N particelle non interagenti di massa m

$$H = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} + A|\vec{r}|^3$$

$$Z_{N_1} = \frac{(Z_1^1)^{N_1}}{N_1!}$$

$$Z_1^1 = \int \frac{d^3\vec{p}\, d^3\vec{q}}{h^3} e^{-\beta H} = \frac{1}{h^3}\int d^3p\, d^3q\, e^{-\beta\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2}} e^{-\beta A|\vec{r}|^3} =$$

$$= \frac{1}{h^3}\int dp_x\, e^{-\beta p_x^2/2m}\int dp_y\, e^{-\beta p_y^2/2m}\int dp_z\, e^{-\beta p_z^2/2m}\int_\rho^R 4\pi r^2 e^{-Ar^3\beta}\, dr =$$

$$= \frac{1}{h^3}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2} 4\pi\int_\rho^R r^2 e^{-Ar^3\beta} dr = \quad \text{poniamo } -Ar^3\beta = t$$

$$= \frac{4\pi}{h^3}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}\int_{-\beta A\rho^3}^{-\beta AR^3} r^2 e^t \frac{dt}{-3Ar^2\beta} = -\frac{4\pi}{h^3}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}\frac{1}{3\beta A}\int_{-\beta A\rho^3}^{-\beta AR^3} e^t dt =$$

$$= \frac{-4\pi}{h^3}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}\frac{1}{3\beta A}\left[e^{-\beta AR^3} - e^{-\beta A\rho^3}\right]$$

$$\Rightarrow Z_1^1 = \frac{4\pi}{h^3}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}\frac{1}{3\beta A}\left[e^{-\beta A\rho^3} - e^{-\beta AR^3}\right]$$

$$F_1 = -kT\log Z_{N_1} = -kT\log\left(\frac{(Z_1^1)^{N_1}}{N_1!}\right) = -kT\left[N_1\log\frac{Z_1^1 e}{N_1}\right]$$ (avendo usato la formula di Stirling $\log N! \simeq N_1\log N_1 - N_1$

$$F_1 = -kTN_1\log\frac{Z_1^1 e}{N_1}$$

$$Z_{N_2} = \frac{(Z_1^2)^{N_2}}{N_2!}$$

$$Z_1^2 = \frac{1}{h^3}\int dp_x\, dp_y\, dp_z\, dx\, dy\, dz\, e^{-\beta H} = \frac{4\pi}{h^3}\left(\frac{2m\pi}{\beta}\right)^{3/2}\int_0^\rho r^2 e^{-\beta Ar^3} dr$$

$$= -\frac{4\pi}{h^3}\left(\frac{2m\pi}{\beta}\right)^{3/2}\frac{1}{3\beta A}\int_0^{-\beta A\rho^3} e^t dt = \quad \text{avendo posto } -\beta Ar^3 = t$$

$$Z_1^2 = \frac{4\pi}{\lambda^3}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}\frac{1}{3\beta A}\left[1-e^{-\beta A \rho^3}\right]$$

$$F_2 = -KN_2T \lg \frac{Z_1^2 e}{N_2}$$

Calcolo la pressione sulla superficie di raggio ρ, ricordiamo che la relazione $dF = -PdV$

- Calcolo pressione $P_2(\rho)$ su superficie di raggio ρ dovuta alle N_2 particelle contenute nella sfera interna.

$$dV = d\left(\frac{4}{3}\pi\rho^3\right) = 4\pi\rho^2 d\rho \qquad dF_2 = -P_2 4\pi\rho^2 d\rho$$

$$F_2 = -KTN_2 \lg\left(\frac{Z_1^2 e}{N_2}\right) = -KTN_2\left[\lg\left(1-e^{-\beta A\rho^3}\right) + \underbrace{\lg\left(\frac{4\pi}{\lambda^3}\left(\frac{2m\pi}{\beta}\right)^{3/2}\frac{1}{3\beta A}\frac{e}{N_2}\right)}_{\text{non dipende da } \rho}\right]$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial\rho} = \frac{-KTN_2\left(-e^{-\beta A\rho^3}\right)}{1-e^{-\beta A\rho^3}}\left(-3A\beta\rho^2\right) = -KTN_2 3A\beta\rho^2\left(\frac{e^{-\beta A\rho^3}}{1-e^{-\beta A\rho^3}}\right)$$

$$P_2 = -\frac{1}{4\pi\rho^2}\frac{\partial F_2}{\partial\rho}$$

$$P_2 = \frac{TKN_2\,3A\beta\rho^2}{4\pi\rho^2}\left(\frac{e^{-\beta A\rho^3}}{1-e^{-\beta A\rho^3}}\right)$$

Calcolo pressione su superficie raggio ρ ($P_1(\rho)$) dovuta a particelle N_1 che si trovano nella corona sferica

$$dV = -4\pi\rho^2 d\rho$$

$$dF_1 = -KN_1T \lg\frac{Z_1 e}{N_1} = -KN_1T\left[\lg\left[e^{-\beta A\rho^3} - e^{-\beta AR^3}\right] + \lg\left[\begin{matrix}\text{NON DIPENDE}\\ \text{DA } \rho\end{matrix}\right]\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial \rho} = + kTN_1 \frac{3A\rho^2 e^{-\beta A\rho^3}}{e^{-\beta A\rho^3} - e^{-\beta AR^3}}$$

$$P_1 = \frac{1}{4\pi\rho^2} \frac{\partial F_1}{\partial \rho} = \frac{kN_1T}{4\pi\cancel{\rho^2}} \frac{3\beta A\cancel{\rho^2} e^{-\beta A\rho^3}}{e^{-\beta A\rho^3} - e^{-\beta AR^3}}$$

SI HA EQUILIBRIO MECCANICO QUANDO $P_1 = P_2$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{kN_1T}}{\cancel{4\pi}} \frac{3\beta A e^{-\beta A\rho^3}}{e^{-\beta A\rho^3} - e^{-\beta AR^3}} = \frac{\cancel{kN_2T}\,3A\beta}{\cancel{4\pi}} \left(\frac{e^{-\beta A\rho^3}}{1 - e^{-\beta A\rho^3}} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{N_1}{e^{-\beta A\rho^3} - e^{-\beta AR^3}} = \frac{N_2}{1 - e^{-\beta A\rho^3}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{N_2} - \frac{e^{-\beta A\rho^3}}{N_2} = \frac{e^{-\beta A\rho^3}}{N_1} - \frac{e^{-\beta AR^3}}{N_1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{N_2} + \frac{e^{-\beta AR^3}}{N_1} = \left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} \right) e^{-\beta A\rho^3}$$

$$\Rightarrow \frac{N_1 + N_2 e^{-\beta AR^3}}{N_1N_2} \cdot \frac{N_1N_2}{N_1+N_2} = e^{-\beta A\rho^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{N_1 + N_2 e^{-\beta AR^3}}{N_1+N_2} = e^{-\beta A\rho^3}$$

$$\Rightarrow (N_1+N_2 = N) \quad \Rightarrow \quad \log \frac{N}{N_1+N_2 e^{-\beta AR^3}} = \beta A \rho^3$$

$$\Rightarrow \quad \rho = \frac{1}{(\beta A)^{1/3}} \left[\log N - \log\left(N_1 + N_2 e^{-\beta AR^3}\right) \right]^{1/3}$$

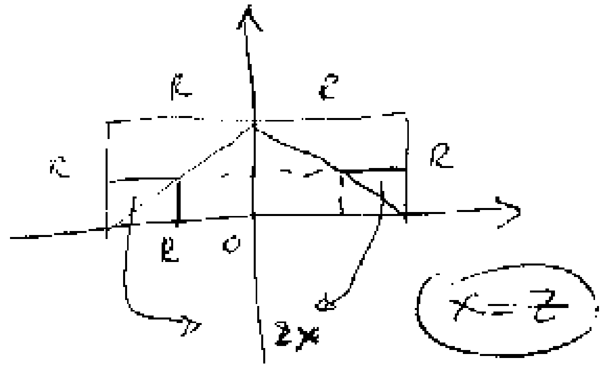
Soluz. esercizio n° 2

$$N(\mathcal{E}) = \int_{\frac{p_x^2+p_y^2}{2m} + mgz \le \mathcal{E}} d\bar{p}\, d\bar{q} = \frac{2}{h^2}\int dx\, dz \int_{P_x^2+P_y^2 \le 2m(\mathcal{E}-mgz)} dP_x\, dP_z =$$

cerchio di raggio $\sqrt{2m(\mathcal{E}-mgz)}$

$$= \frac{2}{h^2}\int dx\, dz\, \pi 2m(\mathcal{E}-mgz) = \frac{4\pi m}{h^2}\int dx\, dz\, (\mathcal{E}-mgz) =$$

$$= \frac{4\pi m}{h^2}\int_0^R dz\, (\mathcal{E}-mgz)\int_0^{2z} dx =$$



$$= \frac{4\pi m}{h^2}\int_0^R (\mathcal{E}-mgz)\, 2z\, dz =$$

$$= \frac{8\pi m}{h^2}\int_0^R z(\mathcal{E}-mgz)\, dz = \frac{8\pi m}{h^2}\int_0^R (\mathcal{E}z - mgz^2)\, dz =$$

$$= \frac{8\pi m}{h^2}\left[\frac{1}{2}\mathcal{E}z^2 - \frac{1}{3}mgz^3\right]_0^R = \frac{8\pi m}{h^2}\left[\frac{\mathcal{E}R^2}{2} - \frac{1}{3}mgR^3\right]$$

N_{MAX} si ottiene ponendo $\mathcal{E} = \mathcal{E}_F = mgR$

$$N_{MAX} = \frac{8\pi m}{h^2}\left[\frac{1}{2}mgR^3 - \frac{1}{3}mgR^3\right] = \frac{4}{3}\pi\frac{m^2 g R^3}{h^2}$$

2) Il valor medio della quota $\langle z\rangle = \int P(z)\, z\, dz = \int dP(z)\cdot z$ essendo $P(z)$ la probabilità di trovare la particella alla quota z.

$$N(\mathcal{E}_F) = \int_0^R \frac{8\pi m}{h^2}\left(\mathcal{E}_F z - mgz^2\right) dz = \int_0^R dn(z)$$

$$dP(z) = \frac{dn(z)}{N_{MAX}} = \frac{1}{N_{MAX}}\cdot\frac{8\pi m}{h^2}\, z(\mathcal{E} - mgz)\, dz$$

$$\Rightarrow \quad \langle z \rangle = \int_0^R z \, dP(z) =$$

$$= \int_0^R \frac{1}{N_{MAX}} \frac{8\pi m}{h^2} z^2 (\mathcal{E}_F - mgz)\, dz =$$

$$= \frac{1}{N_{MAX}} \frac{8\pi m}{h^2} \int_0^R (\mathcal{E}_F z^2 - mgz^3)\, dz =$$

$$= \frac{1}{N_{MAX}} \frac{8\pi m}{h^2} \left[\frac{1}{3} \mathcal{E}_F z^3 - \frac{1}{4} mgz^4 \right]_0^R =$$

$$= \frac{1}{N_{MAX}} \frac{8\pi m}{h^2} \left[\frac{1}{3} mgR^4 - \frac{1}{4} mgR^4 \right] =$$

$$= \frac{1}{N_{MAX}} \frac{8\pi m}{h^2} \left[\frac{mgR^4}{12} \right] \Rightarrow$$

$$\langle z \rangle = \frac{3 h^2 \, 8\pi \, m^2 g R^4}{4 m^2 g R^3 \pi \, 12 \, h^2} = \frac{R}{2}$$

Esercizio

In un sistema costituito da N fermioni non interagenti vincolati in una dimensione l'energia per particella è

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

dove x è la distanza di ogni particella dallo stesso unico centro. Calcolare:

1. Il livello di Fermi e l'energia totale a $T=0$
2. La dipendenza di μ da T
3. Se le particelle fossero BOSONI discutere la possibilità di una condensazione di BOSE-Einstein

---

$$W(\varepsilon) = \frac{g}{h} \int_{H \le \varepsilon} d\vec{p}\, d\vec{x} = \frac{g}{h} \int_{\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \le \varepsilon} dp\, dx =$$

l'integrale rappresenta l'area dell'ellisse $\frac{p^2}{2m\varepsilon} + \frac{x^2}{\frac{2\varepsilon}{m\omega^2}} = 1$ di semiassi $\sqrt{2m\varepsilon}$, $\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m\omega^2}}$

$$= \frac{g}{h} S(\text{ellisse}) = \frac{g\, \pi}{h} \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m\omega^2}} \cdot \sqrt{2m\varepsilon}$$

$$\Rightarrow W(\varepsilon) = \frac{2\pi g \varepsilon}{\cancel{2\pi}\hbar\omega} = g\frac{2\pi\, \varepsilon}{h\omega} = g\frac{\varepsilon}{\hbar\omega}$$

se $T=0$ $\quad W(\varepsilon_F) = N = \frac{2\pi g \varepsilon_F}{h\omega} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_F = \frac{N\hbar\omega}{g}$

Si ha inoltre $\quad E = \int_0^{\infty} \varepsilon\, n(\varepsilon)\, dW(\varepsilon)$

con $\quad n(\varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{per } T < T_F \\ 0 & \text{per } T > T_F \end{cases}$ $\quad$ quindi per $T=0$ si ha

$$E(T=0) = \int_0^{\varepsilon_F} 1 \cdot \varepsilon\, dW(\varepsilon) \Rightarrow \quad \text{essendo} \quad W(\varepsilon) = \frac{g\varepsilon}{\hbar\omega}$$

si ha $\quad dW = \frac{g}{\hbar\omega} d\varepsilon$

volume V. La relazione tra energia e impulso di ogni particella è

$$\varepsilon = c\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} = cp$$

Nel limite classico (alta temperatura e bassa densità) calcolare:

1) C_V ; 2) $\mu(T,P)$

Se, invece, le particelle sono fermioni di spin 1/2 e il sistema è mantenuto a $T=0$, calcolare:

3) per quali valori di (N/V) l'energia media di una particella, U/N, è maggiore di una assegnata energia ε_0

4) per quali valori di (N/V) la pressione del gas è maggiore del valore P_0.

$$\underline{\varepsilon = cp}$$

1) C_V: nell'ensemble canonico calcolo la funzione di partizione.

$$Z = \frac{1}{N!}(Z_\beta)^N$$

$$Z_\beta = \frac{1}{h^3}\int dp\,dx\, e^{-\beta\varepsilon} = \frac{4\pi V}{h^3}\int p^2 e^{-\beta\varepsilon}dp = \frac{4\pi V}{h^3}\int_0^\infty p^2 e^{-\beta c p}dp$$

cambio variabile: $\beta c p = x$

$$dp = \frac{1}{\beta c}dx \qquad p = \frac{x}{\beta c} \rightarrow p^2 = \frac{x^2}{(\beta c)^2}$$

$$Z_\beta = \frac{4\pi V}{h^3}\int_0^\infty \frac{x^2}{(\beta c)^2}\frac{1}{(\beta c)}e^{-x}dx = \frac{4\pi V}{h^3\beta^3 c^3}\int_0^\infty x^2 e^{-x}dx =$$

$$= \frac{4\pi V}{h^3\beta^3c^3}\,2 = \frac{8\pi V}{h^3\beta^3c^3}$$

$$Z = \frac{1}{N!}(Z_\beta)^N = \frac{1}{N!}\left(\frac{8\pi V}{h^3\beta^3c^3}\right)^N$$

$$U = -\frac{\partial}{\partial\beta}\lg Z = -\frac{\partial}{\partial\beta}\lg\left\{\frac{1}{N!}\left(\frac{8\pi V}{h^3\beta^3c^3}\right)^N\right\} = -N\frac{\partial}{\partial\beta}\lg\left(\frac{1}{\beta^3}\right) = +3NK$$

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right) = 3Nk$$

(come si poteva vedere dal teorema di equipartizione dell'energia)

2) $\mu(T,P)$:

nell'ensemble grancanonico, calcolo la funzione di partizione

$$\begin{cases} \mathcal{Z} = \sum_N e^{\beta\mu N} Z(N) \\ Z(N) = \frac{1}{N!}\left(\frac{8\pi V}{h^3\beta^3c^3}\right)^N \end{cases}$$

$$\mathcal{Z} = \sum_N \frac{e^{\beta\mu N}}{N!}\left(\frac{8\pi V}{c^3h^3\beta^3}\right)^N = \exp\left(e^{\beta\mu}\frac{8\pi V}{c^3h^3\beta^3}\right)$$

$$-\Omega = PV = \frac{1}{\beta}\lg \mathcal{Z} = kT\,\lg\left[\exp\left(e^{\beta\mu}\frac{8\pi V}{c^3h^3\beta^3}\right)\right] =$$

$$= kT\, e^{\beta\mu}\frac{8\pi V}{c^3h^3\beta^3}$$

$$P = e^{\beta\mu}\frac{8\pi}{c^3h^3\beta^4} \longrightarrow e^{\beta\mu} = \frac{P\,c^3h^3\beta^4}{8\pi}$$

$$\beta\mu = \lg\left(\frac{Pc^3h^3\beta^4}{8\pi}\right)$$

$$\mu = kT\,\lg\left(\frac{Pc^3h^3}{8\pi k^4T^4}\right) = \mu(T,P)$$

3) # particelle contenute nella sfera di Fermi:

$$N = \frac{g}{h^3}\int d\vec{p}\,d\vec{x} = \frac{g\cdot 4\pi V}{h^3}\int_0^{p_F} p^2 dp = \frac{8\pi V}{3h^3}p_F^3$$

$$\varepsilon = cp \rightsquigarrow \varepsilon_F = cp_F \qquad \frac{\varepsilon}{c} = p \rightarrow \frac{d\varepsilon}{c} = dp$$

$$U = g\int\frac{d\vec{p}\,d\vec{x}}{h^3}\,\varepsilon(p) = \frac{4\pi gV}{h^3}\int_0^{p_F}p^2dp\,\varepsilon = \frac{4\pi gV}{h^3}\int_0^{\varepsilon_F}\frac{\varepsilon^2}{c^3}d\varepsilon\,\varepsilon =$$

$$= \frac{4\pi gV}{c^3h^3}\int_0^{\varepsilon_F}\varepsilon^3 d\varepsilon = \frac{4\pi gV}{c^3h^3}\frac{\varepsilon_F^4}{4} = \frac{2\pi V\,\varepsilon_F^4}{c^3h^3}$$

$$\rightarrow \frac{U}{N} = \frac{2\pi V\varepsilon_F^4}{Nc^3h^3}$$

$$\varepsilon_F^4 = c^4p_F^4 \qquad p_F = h\left(\frac{3N}{8\pi V}\right)^{1/3}$$

$$\rightarrow \varepsilon_F^4 = (ch)^4\left(\frac{3N}{8\pi V}\right)^{4/3}$$

$$\rightarrow \frac{U}{N} = \frac{2\pi}{c^3h^3}\frac{V}{N}(ch)^4\left(\frac{3N}{8\pi V}\right)^{4/3} = ch\,\frac{2\pi}{2^4\pi^{4/3}}3\cdot(3)^{1/3}\left(\frac{N}{V}\right)^{4/3}\cdot\frac{V}{N} =$$

$$= \frac{3ch}{8}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3}\left(\frac{N}{V}\right)^{1/3}$$

$$\frac{U}{N} = \frac{3}{8}ch\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3}\left(\frac{N}{V}\right)^{1/3} > \varepsilon_0$$

$$\left(\frac{N}{V}\right)^{1/3} > \frac{8\varepsilon_0}{3ch}\left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/3}$$

$$\frac{N}{V} > \left(\frac{8\varepsilon_0}{3ch}\right)^3 \left(\frac{\pi}{3}\right)$$

4)
$$PV = -\Omega = \frac{1}{\beta} \lg Z$$

passando al continuo:

$$-\Omega = PV = \frac{g}{\beta} \int \frac{d\vec{p}\, d\vec{x}}{h^3} \lg\left(1+e^{\beta(\mu-\epsilon)}\right) = \frac{4\pi g V}{h^3} \int_0^{p_F} p^2 dp \lg\left(1+e^{\beta(\mu-\epsilon)}\right)$$

$$= \frac{4\pi g V}{h^3} \int_0^{\varepsilon_F} \frac{\varepsilon_F^2}{c^3} \lg\left(1+e^{\beta(\mu-\epsilon)}\right) d\varepsilon$$

$$\lg\left(1+e^{\beta(\mu-\epsilon)}\right) \longrightarrow \begin{cases} \varepsilon > \mu \Rightarrow \lg(1) = 0 \\ \varepsilon < \mu \Rightarrow \beta(\mu-\varepsilon) = \beta(\varepsilon_F - \varepsilon) \end{cases}$$

$$PV = \frac{4\pi g V}{c^3 h^3} \int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon^2 (\varepsilon_F - \varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{4\pi g V}{c^3 h^3} \left[\varepsilon_F \int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon^2 d\varepsilon - \int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon^3 d\varepsilon \right.$$

$$= \frac{4\pi g V}{c^3 h^3} \left(\frac{\varepsilon_F^4}{12}\right) = \frac{\pi g V \varepsilon_F^4}{3 c^3 h^3} = \frac{2\pi V \varepsilon_F^4}{3 c^3 h^3}$$

$$\begin{cases} P = \dfrac{2\pi \varepsilon_F^4}{3c^3h^3} \\ \varepsilon_F^4 = c^4 h^4 \left(\dfrac{3N}{8\pi V}\right)^{4/3} \end{cases}$$

$$P = \frac{2\pi}{3\cancel{c^3}\cancel{h^3}} \cancel{c^4}\cancel{h^4} \left(\frac{3N}{8\pi V}\right)^{4/3} = \frac{2}{\cancel{3}}\pi \cdot \frac{\cancel{3}\,(3)^{1/3}}{2^4 (\pi)^{4/3}} ch \left(\frac{N}{V}\right)^{4/3} =$$

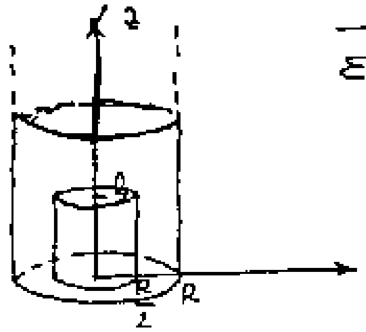
$$= \frac{1}{8}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} \left(\frac{N}{V}\right)^{4/3} ch$$

$$P = \frac{ch}{8}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} \left(\frac{N}{V}\right)^{4/3} > P_0 \quad ; \quad \left(\frac{N}{V}\right)^{4/3} > \frac{8P_0}{ch}\left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/3}$$

$$\left(\frac{N}{V}\right) > \left(\frac{8P_0}{ch}\right)^{3/4} \left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/4}$$

In un recipiente cilindrico di altezza ∞ e raggio R è appoggiato, sulla base, un cilindro coassiale di altezza l e raggio $R/2$.
Nella zona fra i due cilindri ci sono fermioni di massa m e spin $1/2$ soggetti alla forza peso. Calcolare:

1) Qual è il numero massimo di particelle tali che, allo zero assoluto, la quota massima sia l.
2) per $N = N_{max}$ calcolare il valor medio della quota.



$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} + mgz$$

1) $h_{max} = l$ a $T=0$

$\Rightarrow$ fisso l'energia di Fermi

a $p=0$: $\varepsilon_F = mgl$

Calcolo il numero di particelle con $\varepsilon < \varepsilon_F$ contenute nella zona fra i due cilindri, di area $A = \frac{3}{4}\pi R^2$ $\left(= \pi\left(R^2 - \frac{R^2}{4}\right)\right)$

$$N(\varepsilon) = \frac{g}{h^3}\int d\vec{p}\, d\vec{x} = \frac{g}{h^3}\int dx\,dy \int dz \int d\vec{p} =$$

$$= \frac{g}{h^3} A \int_0^{\varepsilon/mg} dz \underbrace{\int_{\frac{p^2}{2m}+mgz<\varepsilon} d\vec{p}}_{\text{volume della sfera di raggio } \sqrt{2m(\varepsilon - mgz)}} = \frac{gA}{h^3}\int_0^{\varepsilon/mg} dz\, \frac{4}{3}\pi\left[2m(\varepsilon - mgz)\right]^{3/2} =$$

$$\frac{p^2}{2m} = \varepsilon - mgz$$

$$= \frac{gA}{h^3}\cdot\frac{4}{3}\pi(2m)^{3/2}\int_0^{\varepsilon/mg}(\varepsilon - mgz)^{3/2}dz =$$

$$= \frac{gA}{h^3}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot(2m)^{3/2}\cdot(\varepsilon)^{3/2}\int_0^{\varepsilon/mg}\left(1 - \frac{mgz}{\varepsilon}\right)^{3/2}dz =$$

$$1 - \frac{mgz}{\varepsilon} = t$$

$$-\frac{mg}{\varepsilon}dz = dt$$

$$dz = -\frac{\varepsilon}{mg}dt$$

$$= \frac{gA}{h^3}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot(2m)^{3/2}(\varepsilon)^{3/2}\int_1^0 -\frac{\varepsilon}{mg}t^{3/2}dt =$$

$$= \frac{gA}{h^3}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot(2m)^{3/2}\frac{\varepsilon^{5/2}}{mg}\int_0^1 t^{3/2}dt =$$

$$= \frac{gA}{h^3}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot(2m)^{3/2}\frac{\varepsilon^{5/2}}{mg}\cdot\frac{2}{5}\,t^{5/2}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{2A}{h^3} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot (2m)^{3/2} \frac{\varepsilon^{5/2}}{mg} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8\pi A}{3h^3} \frac{(2m)^{3/2}}{mg} \varepsilon^{5/2} \cdot \frac{2}{5} =$$

$$= \frac{16\pi A}{15 h^3} \frac{(2m)^{3/2}}{g} \varepsilon^{5/2} \cdot 2 = \frac{32\pi A (2m)^{1/2}}{15 h^3 g} \varepsilon^{5/2}$$

N_{max} si ottiene ponendo $\varepsilon = \varepsilon_F = mg\ell$

$$\begin{cases} N(\varepsilon_F) = \frac{32\pi A (2m)^{1/2}}{15h^3 g} (mg\ell)^{5/2} \\ A = \frac{3}{4}\pi R^2 \end{cases}$$

2) il valor medio della quota è: $\langle z \rangle = \int p(z) z \, dz$

$p(z)$ è la probabilità di trovare la particella alla quota z

$$N(\varepsilon_F) = \int_0^{\varepsilon_F/mg} \underbrace{\frac{2A}{h^3} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot (2m)^{3/2} (\varepsilon_F - mgz)^{3/2}}_{\text{probabilità di trovare la particella ad una certa quota}} dz$$

$$p(z) = \frac{1}{N_{max}} \cdot \frac{8\pi A}{3h^3} (2m)^{3/2} (\varepsilon_F - mgz)^{3/2}$$

$$\langle z \rangle = \int_0^{\varepsilon_F/mg} \frac{1}{N_{max}} \frac{8A\pi}{3h^3} (2m)^{3/2} \varepsilon_F^{3/2} \left(1 - \frac{mgz}{\varepsilon_F}\right)^{3/2} z \, dz =$$

$$= \frac{1}{N_{max}} \cdot \frac{8A\pi}{3h^3} (2m)^{3/2} \varepsilon_F^{3/2} \int_0^{\varepsilon_F/mg} \left(1 - \frac{mgz}{\varepsilon_F}\right)^{3/2} z \, dz$$

$$1 - \frac{mgz}{\varepsilon_F} = t$$

$$z = \frac{\varepsilon_F}{mg}(1-t) \quad \rightarrow \langle z \rangle = \frac{1}{N_{max}} \frac{8A\pi}{3h^3} (2m)^{3/2} \varepsilon_F^{3/2} \int_0^1 \frac{\varepsilon_F^2}{(mg)^2} (1-t) t^{3/2} \, dt =$$

$$dz = -\frac{\varepsilon_F}{mg} dt \qquad = \frac{1}{N_{max}} \frac{8A\pi}{3h^3} (2m)^{3/2} \frac{\varepsilon_F^{7/2}}{(mg)^2} \int_0^1 (1-t) t^{3/2} \, dt =$$

$$= \frac{1}{N_{max}} \frac{8A\pi}{3h^3} (2m)^{3/2} \frac{\varepsilon_F^{7/2}}{(mg)^2} \left[\int_0^1 t^{3/2} dt - \int_0^1 t^{5/2} dt \right] =$$

$$= \frac{1}{N_{max}} \frac{8A\pi}{3h^3} (2m)^{3/2} \frac{\varepsilon_F^{7/2}}{(mg)^2} \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{7} \right) =$$

$$= \frac{{}^{3}\cancel{15} \cancel{h^3} g}{\underset{4}{\cancel{32}} \cancel{\pi} \cancel{A} \cancel{(2m)^{3/2}} \cancel{(mg\ell)^{5/2}}} \cdot \frac{\cancel{8} \cancel{A} \cancel{\pi}}{\cancel{3} \cancel{h^3}} \cancel{(2m)^{3/2}} \frac{(mg\ell)^{\cancel{7/2}}}{(mg)^2} \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{7} \right) =$$

$$= \frac{5\cancel{g}(2\cancel{m})}{\cancel{4}(mg)^{\cancel{2}}}(mg\ell)\left(\frac{\cancel{2}}{5}-\frac{\cancel{2}}{7}\right) = 5\,\frac{mg\ell}{mg}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right) =$$

$$= 5\ell\left(\frac{2}{35}\right) = \frac{2}{7}\ell \,.$$

$$\boxed{\langle z\rangle = \frac{2}{7}\ell}$$

1

---

2 Date N particelle di massa m; in due dimensioni con potenziale singola particella pari a :

$$V = a(x^2+y^2)^2 \quad ; \quad a>0 \quad (V = ar^4 \text{ in coordinate pol.}$$

Calcolare :

1) nel caso di particelle di spin 1/2, la distanza massima dall'orig. alla quale si possono trovare se $T=0$

2) nel caso di particelle di spin zero, la temperatura critica al di sotto della quale c'è condensazione di Bose.

---

1) FERMIONI ; $T=0$; $\epsilon = \frac{p^2}{2m} + V = \frac{p^2}{2m} + ar^4$

Calcolo il # particelle ~~nella sfera di Fermi~~

$$N(\epsilon) = \frac{g}{h^2}\int d\vec{p}\,d\vec{x} = \frac{2}{h^2}\int r\,dr\,d\theta \int p\,dp\,d\varphi \qquad g = 2S+1 = 2\left(\tfrac{1}{2}\right)+1$$

r_{max} si ha per $p=0 \Rightarrow r = \left(\frac{\epsilon}{a}\right)^{1/4}$

p_{max} : $p = \sqrt{2m(\epsilon - ar^4)}$

$$N(\epsilon) = \frac{2}{h^2}\int_0^{(\epsilon/a)^{1/4}}(2\pi)\,r\,dr\int_0^{\sqrt{2m(\epsilon-ar^4)}}(2\pi)\,p\,dp = \frac{2\,(2\pi)^2}{h^2}\int_0^{(\epsilon/a)^{1/4}} r\,dr\int_0^{\sqrt{2m(\epsilon-ar^4)}} p\,dp =$$

$$= \frac{2}{h^2}(2\pi)^2\int_0^{(\epsilon/a)^{1/4}} r\left[\frac{2m(\epsilon-ar^4)}{2}\right]dr = \frac{2(2\pi)^2}{h^2}\int_0^{(\epsilon/a)^{1/4}} m\,r(\epsilon-ar^4)\,dr =$$

$$= \frac{2m(2\pi)^2}{h^2}\left[\epsilon\int_0^{(\epsilon/a)^{1/4}} r\,dr - a\int_0^{(\epsilon/a)^{1/4}} r^5\,dr\right] = \frac{2m(2\pi)^2}{h^2}\left[\frac{\epsilon}{2}\left(\frac{\epsilon}{a}\right)^{1/2} - \frac{a}{6}\left(\frac{\epsilon}{a}\right)^{3/2}\right]$$

$$= \frac{\cancel{2}m(2\pi)^2}{h^2}\left[\left(\frac{\epsilon}{a}\right)^{1/2}\left(\frac{\epsilon}{\cancel{2}} - \frac{a}{\cancel{6}_3}\frac{\epsilon}{a}\right)\right] = \frac{m(2\pi)^2}{h^2}\left(\frac{\epsilon}{a}\right)^{1/2}\left(\epsilon - \frac{\epsilon}{3}\right) =$$

$$= \frac{8\pi^2 m}{3h^2\sqrt{a}}\,\epsilon^{3/2} \quad ; \quad \boxed{N(\epsilon) = \frac{8\pi^2 m}{3h^2\sqrt{a}}\,\epsilon^{3/2}}$$

Il # particelle nella sfera di Fermi:

$$N(\epsilon_F) = \frac{8\pi^2 m}{3h^2\sqrt{a}}(\epsilon_F)^{3/2}$$

$$(\epsilon_F)^{3/2} = \frac{3h^2\sqrt{a}\,N}{8\pi^2 m} \quad ; \quad \epsilon_F = \left(\frac{3h^2\sqrt{a}\,N}{8\pi^2 m}\right)^{2/3}$$

Le particelle che si trovano alla massima distanza hanno questa energia: il contributo è dovuto solo alla parte potenziale.

$$p=0 \Rightarrow \epsilon_F = ar^4$$

$$ar^4 = \left(\frac{3h^2\sqrt{a}\,N}{8\pi^2 m}\right)^{2/3} \longrightarrow \boxed{r = \left(\frac{3h^2 N}{8\pi^2 a^2 m}\right)^{1/6}}$$ Distanza massima

2) il # medio di particelle è

$$\bar{N} = \int_0^\infty \frac{n(\epsilon)\,d\epsilon}{\frac{1}{\xi}e^{\beta\epsilon}-1}$$

$n(\epsilon)$ = densità degli stati; (numero di stati con la stessa en

$$n(\epsilon) = \frac{\partial N(\epsilon)}{\partial \epsilon}$$

$$g = 2S+1 = 2(0)+1 = 1$$

$$N(\epsilon) = \frac{g}{h^2}\int d\vec{p}\,d\vec{x} = \frac{1}{h^2}\int r\,dr\,d\theta \int p\,dp\,d\theta =$$

$$= \frac{(2\pi)^2}{h^2}\int_0^{(\epsilon/a)^{1/4}} \frac{r\,dr}{2}\left[2m(\epsilon - ar^4)\right] = \frac{m(2\pi)^2}{h^2}\int_0^{(\epsilon/a)^{1/4}} r(\epsilon - ar^4)\,dr =$$

$$= \frac{m\cdot 4\pi^2}{h^2}\left[\left(\frac{\epsilon}{a}\right)^{1/2}\frac{\epsilon}{3}\right] = \frac{4}{3}m\frac{\pi^2}{h^2}\frac{\epsilon^{3/2}}{\sqrt{a}}$$

$$n(\epsilon) = \frac{\partial N(\epsilon)}{\partial \epsilon} = \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}m\frac{\pi^2}{h^2}\frac{\epsilon^{1/2}}{\sqrt{a}} = \frac{2m\pi^2}{h^2}\frac{\epsilon^{1/2}}{\sqrt{a}}$$

$$\bar{N} = \int_0^\infty \frac{n(\epsilon)\,d\epsilon}{\frac{1}{\xi}e^{\beta\epsilon}-1} = \int_0^\infty \frac{2m\pi^2}{h^2\sqrt{a}}\frac{\epsilon^{1/2}}{\frac{1}{\xi}e^{\beta\epsilon}-1}\,d\epsilon =$$

$$= \frac{2m\pi^2}{h^2\sqrt{a}}\int_0^\infty \frac{\epsilon^{1/2}}{\frac{1}{\xi}e^{\beta\epsilon}-1}\,d\epsilon$$: # medio di part. (BOSONI) a T qualsiasi

L'integrale è una funzione crescente di ξ, fino al valore max $\xi =$
$\xi = 1$ si ha per $\mu = 0$

per $\mu = 0$ si ha, quindi, il max numero di particelle.

$$I = \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}}{\frac{1}{\xi} e^{\beta\varepsilon} - 1} d\varepsilon \longrightarrow \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}}{e^{\beta\varepsilon} - 1} d\varepsilon$$

cambio variabile : $\beta\varepsilon = x \quad \rightarrow \boxed{\varepsilon = \frac{x}{\beta}}$

$$d\varepsilon = \frac{1}{\beta} dx$$

$$\beta^{3/2} I = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1} dx$$

$$I = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1} dx$$

$x \to \infty \qquad I \to 0 \qquad$ converge

$x \to 0 \qquad I \sim \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad I$ converge

per $\xi = 1$ l'integrale esiste ed è finito.

$$\bar{N} = \frac{2m\pi^2}{\sqrt{a}h^2} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}}{e^{\beta\varepsilon} - 1} d\varepsilon = \frac{2m\pi^2 (kT)^{3/2}}{\sqrt{a}h^2} I$$

Ho un numero limitato di particelle $\rightarrow$ è la condens.

$$\bar{N} = \frac{2m\pi^2 (kT_c)^{3/2}}{\sqrt{a}h^2} I$$

$$(kT_c)^{3/2} = \frac{\sqrt{a}h^2 N}{2m\pi^2 I}$$

$$kT_c = \left[\frac{\sqrt{a}h^2 N}{2m\pi^2 I}\right]^{2/3}$$

$$\boxed{T_c = \frac{1}{k}\left[\frac{\sqrt{a}h^2 N}{2m\pi^2 I}\right]^{2/3}}$$

questa è la temperatura critica.

Si ha un gas perfetto di N particelle contenuto in un volume V.
l'energia di singola particella è
$$\varepsilon(P) = cP_0 \lg(1+P/P_0)$$

a) nel caso di gas classico: 1) la funzione di partizione canonica
2) mostrare che $\exists$ una temperatura massima x il sistema (T_M)
3) per $T<T_M$ calcolare: Energia interna; Potenziale chimico

b) nel caso di un gas quantistico di particelle di spin 1/2 determinare, nel limite $T\to 0°K$, 1) Energia di Fermi; 2) Energia interna

c) calcolare il limite per $P_0\to\infty$ per i risultati ottenuti in a) e b)

d) nel caso di un gas quantistico di particelle di spin intero verificare se ha luogo o no la condensazione di Bose.

FORMULE UTILI

$a>-1$, $b<-1-a$
$$\int_0^\infty dx\, x^a (1+x)^b = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(-a-b-1)}{\Gamma(-b)}$$

$$\begin{cases}\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n! \\ \Gamma(n) = (n-1)!\end{cases}$$

a) $\varepsilon = cP_0 \lg\left(1+\frac{P}{P_0}\right)$ $\qquad P = \sqrt{P_x^2+P_y^2+P_z^2}$

1) $Z = \frac{1}{N!}(Z_B)^N$

$$Z_B = \frac{1}{h^3}\int d\vec{p}\,d\vec{x}\,e^{-\beta\varepsilon} = \frac{V}{h^3}\int d\vec{p}\,e^{-\beta cP_0 \lg\left(1+\frac{P}{P_0}\right)} = \frac{4\pi V}{h^3}\int_0^\infty p^2\left(1+\frac{P}{P_0}\right)^{-\beta cP_0} dp$$

cambio variabile
$$\frac{P}{P_0} = x \qquad dp = P_0\,dx$$
$$P = P_0 x$$

$$Z_B = \frac{4\pi V}{h^3}\int_0^\infty P_0^3\, x^2 (1+x)^{-\beta cP_0} dx = \frac{4\pi V P_0^3}{h^3}\int_0^\infty x^2 (1+x)^{-\beta cP_0} dx$$

$a = 2 > -1$
$b = -\beta cP_0 < -1-a = -1-2 = -3$ $\rightarrow$ 2) T_{max}: $\beta cP_0 = 3$
$$\boxed{T_M = \frac{cP_0}{3k}}$$

$$Z_B = \frac{4\pi V P_0^3}{h^3}\left[\frac{\Gamma(2+1)\Gamma(-2+\beta cP_0-1)}{\Gamma(\beta cP_0)}\right] =$$

$$= \frac{4\pi V P_0^3}{h^3}\left[\frac{2!\,\Gamma(\beta c P_0 - 3)}{\Gamma(\beta c P_0)}\right] = \frac{4\pi V P_0^3}{h^3}\left[\frac{2!\,(\beta c P_0 - 4)!}{(\beta c P_0 - 1)!}\right] =$$

$$= \frac{4\pi V P_0^3}{h^3}\cdot\frac{2}{(\beta c P_0 - 1)(\beta c P_0 - 2)(\beta c P_0 - 3)}$$

$$Z = \frac{1}{N!}\left[\frac{8\pi V P_0^3}{h^3(\beta c P_0 - 1)(\beta c P_0 - 2)(\beta c P_0 - 3)}\right]^N$$

3) $T < T_M$: $U = -\frac{\partial}{\partial\beta}\lg Z = -\frac{\partial}{\partial\beta}\lg\left[\frac{1}{N!}\left(\frac{8\pi V P_0^3}{(\beta c P_0 - 1)(\beta c P_0 - 2)(\beta c P_0 - 3)}\right)^N\right] =$

$$= -N\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\lg\left(\frac{1}{\beta c P_0 - 1}\right) + \lg\left(\frac{1}{\beta c P_0 - 2}\right) + \lg\left(\frac{1}{\beta c P_0 - 3}\right)\right] = N c P_0\left(\frac{1}{\beta c P_0 - 1} + \frac{1}{\beta c P_0 - 2} + \frac{1}{\beta c P_0 - 3}\right)$$

μ :

$$dF = PdV - SdT + \mu dN$$

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V}$$

$$F = -kT\lg Z = -NkT\lg\left(\frac{e\, Z_B}{N}\right)$$

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V} = \frac{\partial}{\partial N}\left[-NkT\lg\left(\frac{e\, Z_B}{N}\right)\right] =$$

$$= -\left[kT\lg\left(\frac{e\, Z_B}{N}\right) + \cancel{N}kT\left(-\frac{1}{\cancel{N}}\right)\right] = -kT\lg\left(\frac{e\, Z_B}{N}\right) + kT\lg e =$$

$$= -\left[kT\lg\left(\frac{e\, Z_B}{e\, N}\right)\right] = -kT\lg\left(\frac{Z_B}{N}\right)$$

$$\mu = -kT\lg\left(\frac{Z_B}{N}\right)$$

b) Fermioni ; spin $1/2$ $\rightarrow$ $g = 2S+1 = 2$ a $T=0$

P_F si calcola come nel caso della particella libera (la cui hamiltoniana è $\frac{p^2}{2m}$) ; infatti il # di stati dipende solo dallo spazio delle fasi e non dall'energia.

Il NUMERO degli STATI NON DIPENDE dalla FORMA dell'energia

Quindi calcolo l'impulso di Fermi dal numero di particelle nella sfera di Fermi come se la particella fosse libera e poi calcolo l'energia di Fermi sostituendo questo valore dell'impulso nella relazione energia - impulso data nel problema.

$$N = \frac{g}{h^3}\int d\vec{p}\,d\vec{x} = \frac{4\pi g V}{h^3}\int_0^{p_F} p^2\,dp = \frac{4}{3}\frac{\pi g V}{h^3}\,p_F^3 \longleftarrow$$

$$p_F^3 = \frac{3h^3N}{4\pi g V} \Rightarrow p_F = \left(\frac{3h^3N}{4\pi g V}\right)^{1/3} = h\left(\frac{3N}{4\pi g V}\right)^{1/3}$$

1) $\varepsilon_F = c p_0 \lg\left(1+\frac{p_F}{p_0}\right)$

2) U : $$U = \frac{1}{h^3}\int d\vec{p}\,d\vec{x}\,\varepsilon = \frac{4\pi g V}{h^3}\int_0 p^2\, c p_0 \lg\left(1+\frac{p}{p_0}\right)dp =$$

$$= \frac{4\pi g V c p_0}{h^3}\int_0^{p_F} p^2 \lg\left(1+\frac{p}{p_0}\right)dp = \frac{4\pi g V c p_0}{h^3}\left[\frac{p^3}{3}\lg\left(1+\frac{p}{p_0}\right) - \int_0^{p_F}\frac{p^3}{3}\frac{1/p_0}{\left(1+\frac{p}{p_0}\right)}dp\right] =$$

$$= \frac{4\pi g V c p_0}{h^3}\left[\frac{p_F^3}{3}\lg\left(1+\frac{p_F}{p_0}\right) - \frac{\cancel{p_0}}{3}\int_0^{p_F}\frac{p^3\,dp}{\cancel{p_0}(p+p_0)}\right] = \frac{4\pi g V c p_0}{h^3}\left[\frac{p_F^3}{3}\lg\left(1+\frac{p_F}{p_0}\right) - \frac{1}{3}\int_0^{p_F}\frac{p^3}{(p+p_0)}dp\right]$$

la funzione da integrare è $\frac{p^3}{(p+p_0)}$; si può trasformare in un'espressione integrabile + facilmente.

$$p^3 = p^3 + p^2p_0 + pp_0^2 + p_0^3 - p^2p_0 - pp_0^2 - p_0^3 =$$
$$= p(p^2 - pp_0 + p_0^2) + p_0(p_0^2 - pp_0 + p^2) - p_0^3 = (p+p_0)(p^2 - pp_0 + p_0^2) - p_0^3$$

quindi

$$\frac{p^3}{(p+p_0)} = p^2 - pp_0 + p_0^2 - \frac{p_0^3}{(p+p_0)}$$

$$U = \frac{4\pi g V c p_0}{h^3}\left[\frac{p_F^3}{3}\lg\left(1+\frac{p_F}{p_0}\right) - \frac{1}{3}\int_0^{p_F}\left(p^2 - pp_0 + p_0^2 - \frac{p_0^3}{(p+p_0)}\right)dp\right] =$$

$$= \frac{4\pi g V c p_0}{h^3}\left[\frac{p_F^3}{3}\lg\left(1+\frac{p_F}{p_0}\right) - \frac{1}{3}\int_0^{p_F}p^2dp + \frac{p_0}{3}\int_0^{p_F}p\,dp - \frac{p_0^2}{3}\int_0^{p_F}dp + \frac{p_0^3}{3}\int_0^{p_F}\frac{dp}{(p+p_0)}\right] =$$

$$= \frac{4\pi g V c p_0}{h^3}\left[\frac{p_F^3}{3}\lg\left(1+\frac{p_F}{p_0}\right) - \frac{p_F^3}{9} + \frac{p_0p_F^2}{6} - \frac{p_0^2p_F}{3} + \frac{p_0^3}{3}\lg\left(1+\frac{p_F}{p_0}\right)\right] =$$

$$= \frac{4\pi g V c p_0}{h^3}\left[\left(\frac{p_F^3}{3} + \frac{p_0^3}{3}\right)\lg\left(1+\frac{p_F}{p_0}\right) - \frac{p_F^3}{9} + \frac{p_0p_F^2}{6} - \frac{p_0^2p_F}{3}\right] =$$

$$= \frac{4\pi g V}{h^3}\underbrace{c p_0 \lg\left(1+\frac{p_F}{p_0}\right)}_{\varepsilon_F}\left(\frac{p_F^3}{3} + \frac{p_0^3}{3}\right) + \frac{4\pi g V c p_0}{h^3}\left[-\frac{p_F^3}{9} + \frac{p_0p_F^2}{6} - \frac{p_0^2p_F}{3}\right] =$$

$$= \left(N\varepsilon_F + N\varepsilon_F\frac{3}{p_F^3}\frac{p_0^3}{3}\right) + Ncp_0\left[-\frac{3}{p_F^3}\cdot\frac{p_F^3}{9} + \frac{3}{p_F^3}\frac{p_0p_F^2}{6} - \frac{3}{p_F^3}\frac{p_0^2p_F}{3}\right] =$$

$$= N\left(1+\frac{p_0^3}{p_F^3}\right)\varepsilon_F + NCp_0\left(-\frac{1}{3}+\frac{p_0}{2p_F}-\frac{p_0^2}{8p_F^2}\right)$$

$$U = N\left(1+\frac{p_0^3}{p_F^3}\right)\varepsilon_F + NCp_0\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\frac{p_0}{p_F}-\frac{p_0^2}{p_F^2}\right)$$

c) CASO QUANTISTICO

ENERGIA di FERMI : $\varepsilon_F = cp_0 \lg\left(1+\frac{p_F}{p_0}\right)$

per $p_0 \to \infty$ si può sviluppare il logaritmo in serie

$$\varepsilon_F = cp_0 \lg\left(1+\frac{p_F}{p_0}\right) \sim cp_0\left(\frac{p_F}{p_0}-\frac{1}{2}\frac{p_F^2}{p_0^2}+\frac{1}{3}\frac{p_F^3}{p_0^3}-\frac{1}{4}\frac{p_F^4}{p_0^4}\cdots\right)=$$

$$= c\left(p_F-\frac{1}{2}\frac{p_F^2}{p_0}+\frac{1}{3}\frac{p_F^3}{p_0^2}-\frac{1}{4}\frac{p_F^4}{p_0^3}\cdots\right)\xrightarrow[p_0\to\infty]{} cp_F$$

$$\varepsilon_F \sim cp_F$$

ENERGIA INTERNA : $U = N\left(1+\frac{p_0^3}{p_F^3}\right)\varepsilon_F + NCp_0\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\frac{p_0}{p_F}-\frac{p_0^2}{p_F^2}\right)$

$$U = NCp_0\left(1+\frac{p_0^3}{p_F^3}\right)\lg\left(1+\frac{p_F}{p_0}\right) + NCp_0\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\frac{p_0}{p_F}-\frac{p_0^2}{p_F^2}\right) \cong$$

$$= NC\left(1+\frac{p_0^3}{p_F^3}\right)p_0\left(\frac{p_F}{p_0}-\frac{1}{2}\frac{p_F^2}{p_0^2}+\frac{1}{3}\frac{p_F^3}{p_0^3}-\frac{1}{4}\frac{p_F^4}{p_0^4}+\frac{1}{5}\frac{p_F^5}{p_0^5}\right)+NC\left(-\frac{p_0}{3}+\frac{p_0^2}{2p_F}-\frac{p_0^3}{p_F^2}\right)=$$

$$= NC\left(1+\frac{p_0^3}{p_F^3}\right)\left(p_F-\frac{1}{2}\frac{p_F^2}{p_0}+\frac{1}{3}\frac{p_F^3}{p_0^2}-\frac{1}{4}\frac{p_F^4}{p_0^3}+\frac{1}{5}\frac{p_F^5}{p_0^4}\cdots\right)+NC\left(-\frac{p_0}{3}+\frac{p_0^2}{2p_F}-\frac{p_0^3}{p_F^2}\right)=$$

$$= NC\left[p_F-\frac{1}{2}\frac{p_F^2}{p_0}+\frac{1}{3}\frac{p_F^3}{p_0^2}-\frac{1}{4}\frac{p_F^4}{p_0^3}+\frac{1}{5}\frac{p_F^5}{p_0^4}+\cancel{\frac{p_0^3}{p_F^2}}-\cancel{\frac{1}{2}\frac{p_0^2}{p_F}}+\frac{1}{3}\cancel{p_0}-\frac{1}{4}p_F+\frac{1}{5}\frac{p_F^2}{p_0}\cdots+\right.$$

$$\left.-\cancel{\frac{p_0}{3}}+\cancel{\frac{1}{2}\frac{p_0^2}{p_F}}-\cancel{\frac{p_0^3}{p_F^2}}\right]=$$

$$= NC\left[p_F-\frac{1}{4}p_F+\underbrace{R(1/p_0)}_{\text{potenze di } \frac{1}{p_0}}\right]\xrightarrow[p_0\to\infty]{}\frac{3}{4}NCp_F$$

$$U \to \frac{3}{4}NCp_F$$

CASO CLASSICO :

POTENZIALE CHIMICO : $\mu = -kT\lg\left(\frac{z_B}{N}\right)$

$$z_B = \frac{8\pi V}{h^3}\left[\frac{p_0^3}{(\beta cp_0-1)(\beta cp_0-2)(\beta cp_0-3)}\right]$$

$$\frac{P_0^3}{(\beta cP_0-1)(\beta cP_0-2)(\beta cP_0-3)} = \frac{P_0^3}{(\beta^2c^2P_0^2-3\beta cP_0+2)(\beta cP_0-3)} = \frac{P_0^3}{(\beta^3c^3P_0^3-6\beta^2c^2P_0^2+11\beta cP_0-6)}$$

$$= \frac{1}{\beta^3c^3-\frac{6\beta^2c^2}{P_0}+11\frac{\beta c}{P_0^2}-\frac{6}{P_0^3}} \xrightarrow[P_0\to\infty]{} \frac{1}{\beta^3c^3}$$

quindi

$$\to \mu = -kT\lg Z_B \to -kT\lg\left(\frac{1}{\beta^3c^3}\right) - kT\lg\left(\frac{8\pi V}{h^3}\right) =$$

$$= -kT\lg\left(\frac{8\pi V}{Nh^3}\beta^3c^3\right)$$

ENERGIA INTERNA :

$$U = NCP_0\left(\frac{1}{\beta cP_0-1}+\frac{1}{\beta cP_0-2}+\frac{1}{\beta cP_0-3}\right)$$

$$U = NC\left(\frac{1}{\beta c-\frac{1}{P_0}}+\frac{1}{\beta c-\frac{2}{P_0}}+\frac{1}{\beta c-\frac{3}{P_0}}\right) \xrightarrow[P_0\to\infty]{} 3\frac{NC}{\beta C} = 3NkT$$

d) si verifica la condensazione di Bose? ($g = 2s+1$; s intero)

$$\bar N = \frac{4\pi gV}{h^3}\int_0^\infty p^2\frac{1}{\frac{1}{\xi}e^{\beta\varepsilon}-1}\,dp = \qquad \xi = e^{\beta\mu} \text{ fugacità.}$$

$$= \frac{4\pi gV}{h^3}\int_0^\infty \frac{p^2}{\frac{1}{\xi}\left(1+\frac{p}{P_0}\right)^{\beta cP_0}-1}\,dp = \qquad \frac{p}{P_0}=x \quad p=P_0x \quad dp=P_0\,dx$$

$$= \frac{4\pi gVP_0^3}{h^3}\int_0^\infty \frac{x^2}{\frac{1}{\xi}(1+x)^{\beta cP_0}-1}\,dx = \frac{4\pi gVP_0^3}{h^3}\int_1^\infty \frac{(x-1)^2}{\frac{1}{\xi}(x)^{\beta cP_0}-1}\,dx =$$

$$= \frac{4\pi gVP_0^3}{h^3}\int_1^0 -\frac{dy}{y^2}\,\frac{\left(\frac{1}{y}-1\right)^2}{\frac{1}{\xi}\left(\frac{1}{y}\right)^{\beta cP_0}-1} = \frac{4\pi gVP_0^3}{h^3}\int_0^1\frac{(1-y)^2}{y^4\left(\frac{1}{\xi}y^{-\beta cP_0}-1\right)}\,dy =$$

$$= \frac{4\pi gVP_0^3}{h^3}\int_0^1\frac{\xi(1-y)^2y^{-4}}{y^{-\beta cP_0}-\xi}\,dy = \frac{4\pi gVP_0^3\xi}{h^3}\int_0^1\frac{(1-y)^2y^{\beta cP_0-4}}{1-\xi y^{\beta cP_0}}\,dy$$

il denominatore è la somma di una serie geometrica

$$\frac{4\pi gVP_0^3}{h^3}\sum \xi^n\frac{2\Gamma(n\beta cP_0-3)}{\Gamma(n\beta cP_0)} = g\frac{4\pi VP_0^3}{h^3}2\sum \xi^n\frac{1}{(n\beta cP_0-1)(n\beta cP_0-2)(n\beta cP_0-3)}$$

$T\to 0$
$\beta\to\infty \Rightarrow \mu\to 0$ da valori negativi $\Rightarrow \bar N \to \frac{8\pi gV}{c^3h^3}\frac{1}{\beta^3}\sum_n\frac{\xi^n}{n^3}$ c'è CONDENSAZIONE!
$\xi\to 1$
è un # limitato di particelle !

SVILUPPI IN SERIE

1) $\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \dots$

2) $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} \dots$

3) $\operatorname{sen}^2 x = \frac{2x^2}{2!} - \frac{2^3}{4!} x^4 + \frac{2^5}{6!} x^6 \dots$

4) $\cos^2 x = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{2n!}$

5) $\operatorname{senh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

6) $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots + \frac{x^{2n}}{2n!}$

7) $\operatorname{tgh} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 \dots$

8) $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 \dots$

9) $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} \dots$

10) $e^{-z} = 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!}$

11) $\lg(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots$

12) $e^{1/x} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2!x^2} + \frac{1}{3!x^3}$

13) $e = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \dots$