3° ESONERO MARTINELLI 5/2/90

1 $\boxed{\text{Esercizio 1}}$

Due particelle identiche di spin 1/2 si trovano in uno stato descritto da una funzione d'onda della forma:

$$\psi = X(r_1, r_2)\Phi(\theta_1, \phi_1, \theta_2, \phi_2)S(\sigma_z^1, \sigma_z^2)$$

Una misura del momento angolare orbitale di una singola particella puo' dare come risultato $2\hbar^2$ o 0.

1) Trovare tutti i possibili stati di sistema, che siano autostati del modulo quadro del momento angolare totale, J^2, e della componente lungo l'asse z, J_z, nei seguenti casi:

i) $X(r_1, r_2) = +X(r_2, r_1)$

ii) $X(r_1, r_2) = -X(r_2, r_1)$

2) Calcolare per gli stati trovati in 1) il valor medio dell'operatore

$$\delta H = a\vec{L} \cdot \vec{\sigma} + b(L_z + 2\sigma_z)$$

dove $\vec{L}$ e $\vec{\sigma}$ sono il momento angolare orbitale e lo spin totale del sistema.

2 Esercizio 2

Sia data l'Hamiltoniana:

$$\begin{aligned} H &= H_0 + \frac{m\delta\omega^2 xy}{2} \\ &= \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2(x^2 + y^2)}{2} + \frac{m\delta\omega^2 xy}{2} \end{aligned}$$

1) Trovare lo spettro degli autovalori dell'Hamiltoniana ed i corrispondenti autostati.

2) Considerando il termine proporzionale a $\delta\omega^2$ come una perturbazione, calcolare lo spostamento in energia per gli stati corrispondenti ai due autovalori piu' piccoli di H_0 e confrontare il risultato perturbativo con quanto ottenuto in 1).

ES. N 1 3° ESONERO 5/12/90

$$\psi = \chi(r_1, r_2)\, \Phi(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2)\, S(\sigma_z^1, \sigma_z^2)$$

$\begin{cases} l_1 = 0 \\ l_2 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} l_1 = 1 \\ l_2 = 0 \end{cases}$ $l = l_1 + l_2 = 1$ sempre

$$|J, J_z\rangle = |l, l_z\rangle |s, s_z\rangle$$

1) $\chi(r_1, r_2) = \chi(r_2, r_1)$

A) $\Phi(1,2) = -\Phi(2,1)$ $S(1,2) = S(2,1)$ (Tripletto simmetrico)

$s = 1$ $l = 1$ $J = \begin{cases} 2 & \text{simmetriche} & \text{NO} \\ 1 & \text{antisimm.} & \text{SI} \\ 0 & \text{simm.} & \text{NO} \end{cases} \Rightarrow$

$s = 1$ $l = 1$ $J = 1$ $J_z = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$

ket di base $|J, J_z\rangle = |l, l_z\rangle |s, s_z\rangle$

$$\boxed{\begin{aligned} |1,1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |1,0\rangle_1 |1,1\rangle_2 - |1,1\rangle_1 |1,0\rangle_2 \right\} \\ |1,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |1,-1\rangle_1 |1,1\rangle_2 - |1,1\rangle_1 |1,-1\rangle_2 \right\} \\ |1,-1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |1,-1\rangle_1 |1,0\rangle_2 - |1,0\rangle_1 |1,-1\rangle_2 \right\} \end{aligned}}$$

B) $\Phi(1,2) = \Phi(2,1)$ $S(1,2) = -S(2,1)$ (Singoletto antisimm.)

$s = 0$ $l = 1$ $J = 1$ $J_z = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$

Poichè non c'è spin il ket di base è qui

$$|J, J_z\rangle = |l_1, l_z^1\rangle |l_2, l_z^2\rangle$$

ATTENZIONE SBAGLIA GLI STATI

lo stato massimo è $|J, J_z\rangle = |1,1\rangle$ $\Rightarrow$

$$|1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|1,1\rangle_1 |0,0\rangle_2 + |0,0\rangle_1 |1,1\rangle_2\right\}$$

Applico ad ambo i membri $J^- = L^-$

$$J^-|1,1\rangle = |1,0\rangle = L^- \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|1,1\rangle|0,0\rangle + |0,0\rangle|1,1\rangle\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|1,0\rangle|0,0\rangle + |0,0\rangle|1,0\rangle\right\}$$ ancora

$$J^-|1,0\rangle = |1,-1\rangle = L^- \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|1,0\rangle|0,0\rangle + |0,0\rangle|1,0\rangle\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|1,-1\rangle|0,0\rangle + |0,0\rangle|1,-1\rangle\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} |1,1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|1,1\rangle_1 |0,0\rangle_2 + |0,0\rangle_1 |1,1\rangle_2\right\} \\ |1,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|1,0\rangle_1 |0,0\rangle_2 + |0,0\rangle_1 |1,0\rangle_2\right\} \\ |1,-1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|1,-1\rangle_1 |0,0\rangle_2 + |0,0\rangle_1 |1,-1\rangle_2\right\} \end{aligned}}$$ *

) $X(r_1, r_2) = X(r_2, r_1)$

r) $\Phi(1,2) = -\Phi(2,1)$ $\quad S(1,2) = -S(2,1)$ Singoletto (antisimm.)

$s=0 \quad l=1 \quad j=1 \quad j_z = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$

Anche qui il ket di base è

$$|J, J_z\rangle = |l_1, l_z^1\rangle |l_2, l_z^2\rangle$$

li autostati sono uguali ad (*) con i segni invertiti

$$|1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|1,1\rangle_1|0,0\rangle_2 - |0,0\rangle_1|1,1\rangle_2\right\}$$

$$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|1,0\rangle_1|0,0\rangle_2 - |0,0\rangle_1|1,0\rangle_2\right\}$$

$$|1,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|1,-1\rangle_1|0,0\rangle_2 - |0,0\rangle_1|1,-1\rangle_2\right\}$$

3) $\Phi(1,2) = \Phi(2,1)$ $\quad S(1,2) = S(2,1)$ $\quad$ Tripletto (simm.)

$S=1 \quad l=1 \quad J = \begin{cases} 2 \text{ simm.} & J_z \begin{cases} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{cases} \\ 0 \text{ simm} & \to J_z = 0 \end{cases}$

ket di base $|J, J_z\rangle = |l, l_z\rangle|s, s_z\rangle$

$$|2,2\rangle = |1,1\rangle_1|1,1\rangle_2$$

$$|2,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|1,0\rangle_1|1,1\rangle_2 + |1,1\rangle_1|1,0\rangle_2\right\}$$

$$|2,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left\{|1,-1\rangle_1|1,1\rangle_2 + 2|1,0\rangle_1|1,0\rangle_2 + |1,1\rangle_1|1,-1\rangle_2\right\}$$

$$|2,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|1,-1\rangle_1|1,0\rangle_2 + |1,0\rangle_1|1,-1\rangle_2\right\}$$

$$|2,-2\rangle = |1,-1\rangle_1|1,-1\rangle_2$$

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{|1,1\rangle|1,-1\rangle - |1,0\rangle|1,0\rangle + |1,-1\rangle|1,1\rangle\right.$$

Gli autostati di $J^2 J_z$ sono in tutto 15

$$\delta H = a\vec{L}\cdot\vec{\sigma} + b(L_z + 2\sigma_z)$$

$$\delta H = \frac{a}{2}(J^2 - L^2 - S^2) + b(L_z + 2S_z)$$

Lo spettro degli autovalori è

$$\frac{a}{2}\hbar^2\left[J(J+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)\right] + b\ell_z\hbar + 2bs_z\hbar$$

$$\langle J, J_z | \delta\hat{H} | J, J_z \rangle$$

$\langle 1,1 | \delta H | 1,1 \rangle = -a\hbar^2 + 2b\hbar + 0 = (-a\hbar^2 + 2b\hbar)\frac{1}{2}$

$\langle 1,0 | \delta H | 1,0 \rangle = -a\hbar^2 - b\hbar + 2b\hbar + 2b\hbar - b\hbar = (-a\hbar + 2b\hbar)\frac{1}{2}$

$\langle 1,-1 | \delta H | 1,-1 \rangle = -a\hbar^2 - b\hbar + 2b\hbar = (-a\hbar^2 + b\hbar)\frac{1}{2}$

$\langle 1,1 | \delta H | 1,1 \rangle = 0 + 2b\hbar = 2\frac{b\hbar}{2} = b\hbar$

$\langle 1,0 | \delta H | 1,0 \rangle = 0 + 0 = 0$

$\langle 1,-1 | \delta H | 1,-1 \rangle = 0 - 2b\hbar = -2b\hbar\frac{1}{2} = -b\hbar$

$\langle 1,1 | \delta H | 1,1 \rangle = 0$

$\langle 1,0 | \delta H | 1,0 \rangle = 0$

$\langle 1,-1 | \delta H | 1,-1 \rangle = 0$

$\langle 2,2 | \delta H | 2,2 \rangle = a\hbar^2 + 3b\hbar$

$\langle 2,1 | \delta H | 2,1 \rangle = (a\hbar^2 + 3b\hbar)\frac{1}{2}$

$\langle 2,0 | \delta H | 2,0 \rangle = \frac{1}{6}(a\hbar^2) = \frac{a\hbar^2}{6}$

$\langle 2,-1 | \delta H | 2,-1 \rangle = \frac{1}{2}(a\hbar^2 - 3b\hbar) = \frac{1}{2}(a\hbar^2 - 3b\hbar)$

$\langle 2,-2 | \delta H | 2,-2 \rangle = a\hbar^2 - 3b\hbar$

$\langle 0,0 | \delta H | 0,0 \rangle = \frac{1}{3}(-2a\hbar^2 + 0) = -\frac{2}{3}a\hbar^2$

PROVA SCRITTA DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

del 20/6/90

Prof. G. Martinelli

1 Esercizio

Si consideri una particella di spin 1/2, vincolata da un potenziale armonico in tre dimensioni, la cui hamiltoniana e' data dall'espressione:

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + a\vec{L}\cdot\vec{s} \qquad (1)$$

con $|a| \leq \hbar\omega$. $\vec{L}$ e' il momento angolare e $\vec{s}$ lo spin della particella.

1) Determinare lo spettro della hamiltoniana

2) Determinare le auto-funzioni di momento orbitale L=0 e L=1 corrispondenti ai valori piu' piccoli dell'energia.

2 Esercizio

La hamiltoniana di una particella di spin 1/2 e' data, trascurando il termine cinetico, dall'espressione:

$$H = -\mu\hbar\vec{B}\cdot\vec{\sigma} \qquad (2)$$

dove il campo magnetico $\vec{B}$ e' diretto lungo l'asse x. La particella si trova all'istante $t = 0$ in uno auto-stato di σ_z con autovalore +1. Determinare:

i) l'evoluzione temporale dello stato

ii) dopo quanto tempo la particella e' tornata nello stato iniziale

iii) il valor medio di σ_y in funzione del tempo.

Esercizio N.1 20/6/50

$$H = \frac{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2+z^2) + a\vec{L}\cdot\vec{S}$$

1) Scelgo come ket di base

$$|n, J, J_z, L, S\rangle \qquad \text{dove } |n\rangle = |n_x, n_y, n_z\rangle$$

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + a\left(\frac{J^2 + L^2 - S^2}{2}\right) \Rightarrow$$

$$H|n, J, J_z, L, S\rangle = \hat{H}_0|n\rangle + \frac{a}{2}(J^2 - L^2 - S^2)|J, J_z, L, S\rangle$$

$$\hat{H}_0|n\rangle = \hbar\omega\left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2}\right)|n\rangle$$

$$J^2|J, J_z, L, S\rangle = \hbar^2 j(j+1)|J, J_z, L, S\rangle$$

$$L^2|J, J_z, L, S\rangle = \hbar^2 \ell(\ell+1)|J, J_z, L, S\rangle$$

$$S^2|J, J_z, L, S\rangle = \hbar^2 s(s+1)|J, J_z, L, S\rangle$$

$$E_{n,j,\ell,s} = \hbar\omega\left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2}\right) + \frac{a}{2}\left(\hbar^2 j(j+1) - \hbar^2\ell(\ell+1) - \hbar^2 s(s+1)\right)$$

Lo spettro di $\hat{H}$ è quindi

$$\boxed{E(n,j,\ell,s) = \hbar\omega\left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2}\right) + \frac{a\hbar^2}{2}\left[j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)\right]}$$

2) Troviamo prima tutti gli stati possibili del sist. con $n = n_x + n_y + n_z = 0$. Il ket di base è

$$|n, L, S, J, J_z\rangle \qquad S = \frac{1}{2}$$

A) $n = 0$ $L = 0$ ho due stati

Poichè $J = L + S$

I) $|0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$

II) $|0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$

cioè $J = \frac{1}{2} \rightarrow J_z = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$

dato che $-J \leq J_z \leq J$

e che $|L-S| \leq J \leq L+S$

B) $n = 0$ $L = 1$ $S = \frac{1}{2}$

NO POSSIBILI

$$J = \begin{cases} \frac{3}{2} \longrightarrow J_z = \begin{cases} 3/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -3/2 \end{cases} \\ \frac{1}{2} \longrightarrow J_z = \begin{cases} 1/2 \\ -1/2 \end{cases} \end{cases}$$

ho quindi 6 stati

$|0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$

$|0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$

$|0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle$

$|0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle$

$|0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$

$|0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle$

Calcoliamo gli autoval. dell'en. corrisp. a questi 8 autostati e vediamo quali assumono valore minore (fissato che $n=0$ è il valore che minimizza lo spettro di $\hat{H}_0$ = oscill. arm. tridim.)

I) $|0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$

$$E(n,\ell,j,s) = \frac{3}{2}\hbar\omega \rightarrow E_{I} = \frac{3}{2}\hbar\omega$$

II) $|0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \rightarrow E_{II} = \frac{3}{2}\hbar\omega$

III) $|0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle \quad E_{III} = \frac{3}{2}\hbar\omega - a\hbar^2$

IV) $|0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \quad E_{IV} = \frac{3}{2}\hbar\omega - a\hbar^2$

V) $|0,1,\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle \quad E_{V} = \frac{3}{2}\hbar\omega + \frac{a}{2}\hbar^2$

VI) $|0,1,\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle \quad E_{VI} = \frac{3}{2}\hbar\omega + \frac{a}{2}\hbar^2$

$$E_{VII} = E_{VIII} = E_{VI}$$

Gli autovalori più piccoli (per $L=0$ $L=1$) sono

$$\boxed{E_{I} = \frac{3}{2}\hbar\omega}$$ che ha una degenerazione due

$$\boxed{\begin{array}{c} |0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle \\ |0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \end{array}}$$

e $$\boxed{E_{III} = \frac{3}{2}\hbar\omega - a\hbar^2}$$ che ha una degenerazione due

$$\boxed{\begin{array}{c} |0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle \\ |0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \end{array}}$$

Esercizio N.2 20/6/90

$$H = -\mu\hbar\,\vec{B}\cdot\vec{\sigma}$$

$$\vec{B} \equiv (B_x, 0, 0) \Rightarrow \vec{B}\cdot\vec{\sigma} = B_x\sigma_x$$

$$H = -\mu\hbar B_x \sigma_x$$

Poiché a $t=0$ lo stato è autostato di σ_z con autov. $+1 \Rightarrow$

$$|\psi\rangle_{t=0} = |\sigma_z,\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\sigma_x,\uparrow\rangle + |\sigma_x,\downarrow\rangle\right)$$

1) L'evoluzione temporale è

$$|\psi\rangle_t = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\,|\psi\rangle_{t=0} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}(\hat{H}t)}}{\sqrt{2}}\left(|\sigma_x,\uparrow\rangle + |\sigma_x,\downarrow\rangle\right)$$

Poiché

$$\hat{H}|\sigma_x,\uparrow\rangle = -\mu\frac{\hbar^2}{2}B_x|\sigma_x,\uparrow\rangle \quad e$$

$$\hat{H}|\sigma_x,\downarrow\rangle = \mu\frac{\hbar^2}{2}B_x|\sigma_x,\downarrow\rangle \Rightarrow$$

$$|\psi\rangle_t = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{\frac{i\hbar}{2}B_x t}|\sigma_x,\uparrow\rangle + e^{-\frac{i\hbar}{2}B_x t}|\sigma_x,\downarrow\rangle\right)$$

Si ha pertanto che l'evoluz. temp. è $\rightarrow$

$$\boxed{|\psi\rangle_t = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\sigma_x,\uparrow\rangle + e^{-i\hbar B_x \mu t}|\sigma_x,\downarrow\rangle\right)}$$

2) Poiché lo stato iniz. è

$$|\psi\rangle_t = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\sigma_x,\uparrow\rangle + |\sigma_x,\downarrow\rangle\right)$$

per vedere dopo quanto tempo il sistema torna nello stato iniziale basta porre

$$e^{-i\hbar B_x \mu t} = 1$$

ma poiché $1 = e^{-2\pi i}$ si ha

$$-\cancel{i}\hbar B_x^{\mu} t = -2\pi \cancel{i}$$

$$\boxed{t = \frac{2\pi}{\hbar\mu B_x}}$$

Per calcolare

$$_t\langle\psi|\hat{\sigma}_y|\psi\rangle_t$$

bisogna esprimere $|\sigma_x,\uparrow\rangle$ e $|\sigma_x,\downarrow\rangle$ in funzione di $|\sigma_y,\uparrow\rangle$ e $|\sigma_y,\downarrow\rangle$

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$|\lambda_i\rangle = c_1|\uparrow\rangle + c_2|\downarrow\rangle$$

$$\hat{\sigma}_y|\lambda_i\rangle = \lambda_i|\lambda_i\rangle$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad c_1|\uparrow\rangle + c_2|\downarrow\rangle = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Trovo gli autovalori

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \pm 1$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad -c_1 - i c_2 = 0 \rightarrow c_2 = -\frac{1}{i} c_1 \rightarrow c_2 = i c_1$$

$$\lambda_2 = -1 \qquad c_1 - i c_2 = 0 \qquad c_2 = \frac{1}{i} c_1 \rightarrow c_2 = -i c_1$$

Poiché

$$|\sigma_y, \uparrow\rangle = c_1 |\sigma_x, \uparrow\rangle + c_2 |\sigma_x, \downarrow\rangle$$

Per $\lambda = 1$

$$|\sigma_y, \uparrow\rangle = c_1 \left(|\sigma_x, \uparrow\rangle + i |\sigma_x, \downarrow\rangle \right)$$

Poiché

$$|\sigma_y, \downarrow\rangle = c_1 |\sigma_x, \uparrow\rangle + c_2 |\sigma_x, \downarrow\rangle$$

Per $\lambda = -1$

$$|\sigma_y, \downarrow\rangle = c_1 \left(|\sigma_x, \uparrow\rangle - i |\sigma_x, \downarrow\rangle \right)$$

con $c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Si ha pertanto

$$\begin{cases} |\sigma_y,\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\sigma_x,\uparrow\rangle + i\,|\sigma_x,\downarrow\rangle\right) \\ |\sigma_y,\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\sigma_x,\uparrow\rangle - i\,|\sigma_x,\downarrow\rangle\right) \end{cases}$$

Sommando si ha

$$\frac{2}{\sqrt{2}}|\sigma_x,\uparrow\rangle = |\sigma_y,\uparrow\rangle + |\sigma_y,\downarrow\rangle \Rightarrow$$

$$|\sigma_x,\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\sigma_y,\uparrow\rangle + |\sigma_y,\downarrow\rangle\right)$$

Sottraendo

$$\frac{2}{\sqrt{2}}\,i\,|\sigma_x,\downarrow\rangle = |\sigma_y,\uparrow\rangle - |\sigma_y,\downarrow\rangle \Rightarrow$$

$$\begin{cases} |\sigma_x,\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\sigma_y,\uparrow\rangle + |\sigma_y,\downarrow\rangle\right) \\ |\sigma_x,\downarrow\rangle = \frac{1}{i\sqrt{2}}\left(|\sigma_y,\uparrow\rangle - |\sigma_y,\downarrow\rangle\right) \end{cases}$$

Calcoliamo ora $\langle\hat{\sigma}_y\rangle_t$

NOTA. indico $|\sigma_{x,y},\uparrow\downarrow\rangle$ con $|\uparrow\downarrow\rangle_{x,y}$

$${}_t\langle\psi|\hat{\sigma}_y|\psi\rangle_t =$$

$$= \frac{1}{2}\left({}_x\langle\uparrow| + e^{i\hbar B_x^{\mu} t}\,{}_x\langle\downarrow|\right)\hat{\sigma}_y\left(|\uparrow\rangle_x + e^{-i\hbar B_x^{\mu} t}|\downarrow\rangle_x\right) = \longrightarrow$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left({}_y\langle\uparrow| + {}_y\langle\downarrow|\right) + \frac{e^{\mu i\hbar B_x t}}{i\sqrt{2}}\left({}_y\langle\uparrow| - {}_y\langle\downarrow|\right)\right]\hat{\sigma}_y \times$$

$$\times\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_y + |\downarrow\rangle_y\right) + \frac{e^{-i\hbar B_x^{\mu} t}}{i\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_y - |\uparrow\rangle_y\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left({}_y\langle\uparrow| + {}_y\langle\downarrow|\right) + \frac{e^{i\hbar B_x^{\mu} t}}{i}\left(|\uparrow\rangle_y - |\downarrow\rangle_y\right)\right] \times$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle_y - \frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle_y + \frac{e^{-i\hbar B_x^{\mu} t}}{i}\left(\frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle_y + \frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle_y\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cancel{\frac{\hbar}{2}} + \frac{\hbar}{2i}e^{-i\hbar B_x^{\mu} t} - \cancel{\frac{\hbar}{2}} + \frac{\hbar}{2i}e^{-i\hbar B_x^{\mu} t} + \right.$$

$$\left. + \frac{\hbar}{2i}e^{i\hbar B_x \mu t} - \cancel{\frac{\hbar}{2}} + \frac{\hbar}{2i}e^{i\hbar B_x \mu t} + \cancel{\frac{\hbar}{2}}\right) =$$

$$= \frac{\hbar}{4}\left(\frac{1}{i}e^{-i\hbar B_x \mu t} + \frac{1}{i}e^{i\hbar B_x \mu t}\right) =$$

$$= -\frac{\hbar i}{4}\left(e^{-i\hbar B_x \mu t} + e^{i\hbar B_x \mu t}\right) = \qquad i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{\hbar}{4}e^{i\frac{\pi}{2}}\left(e^{-i\hbar B_x \mu t} + e^{i\hbar B_x \mu t}\right) =$$

$$-\frac{\hbar}{4}\left(e^{-i\hbar B_x^{\mu} t + \frac{\pi}{2}i} + e^{i\hbar B_x^{\mu} t + \frac{\pi}{2}}\right) = \quad \rightarrow$$

Prova di esonero di Istituzioni di Fisica Teorica
20-dicembre 1995

Una particella di spin $\frac{1}{2}$ si muove in uno spazio a tre dimensioni e la sua Hamiltoniana

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \mathbf{r}^2 + \lambda \sqrt{\frac{\omega}{m\hbar}}\, \mathbf{p}\cdot\mathbf{s}.$$

Determinare :

a) l'energia del livello fondamentale fino al II ordine in λ e la relativa degenerazione,

b) i corrispondenti ket fino al I ordine in λ

2) Due particelle identiche di spin $\frac{1}{2}$ sono vincolate a muoversi sulla superfice di una sfera di raggio R.

La loro Hamiltoniana é:

$$H_0 = \frac{1}{2mR^2}\mathbf{L}_1^2 + \frac{1}{2mR^2}\mathbf{L}_2^2 + \frac{1}{mR^2}\mathbf{L}_1\cdot\mathbf{S}_1 + \frac{1}{mR^2}\mathbf{L}_2\cdot\mathbf{S}_2.$$

Determinare:

a) le costanti del moto;

b) autovalori e autoket dell'hamiltoniana nel caso in cui $l_1 = l_2 = 1$.

Si consideri ora la perturbazione

$$\lambda V = \lambda \frac{1}{mR^2}(L_{1z}\cdot L_{2z}).$$

c) calcolare la correzione al I ordine in λ dell'energia di quelli tra gli stati discussi al punto (b) che sono autostati di J_z ($J_z = L_{1z} + S_{1z} + L_{2z} + S_{2z}$) con autovalore zero e hanno la massima energia.

(CASSANDRO)

Soluzione problema (1)

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \vec{r}^2 + \lambda \sqrt{\frac{\omega}{m\hbar}}\, \vec{P}\cdot\vec{S}$$

I livelli energetici dell' Hamiltoniana imperturbata sono

$E_{\underline{n}} = \hbar\omega\left(\frac{3}{2} + n_x + n_y + n_z\right)$ in particolare $E_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega$

Particella dotata di spin $\Rightarrow$ stato fondamentale è 2 volte degenere $(S_z = \pm\frac{1}{2}\hbar)$

$|\varphi\rangle = \sum_{i=1}^{2} c^i |\varphi_0^i\rangle + \lambda$

la correzione al 1° ordine allo stato fondamentale è zero infatti $\langle E_0 | \vec{P}\cdot\vec{S} | E_0\rangle = 0$ perché P è una variabile dispari

PROBLEMA: la degenerazione NON è rimossa al 1° ordine, come fare per il 2°?

Osserviamo che H commuta con J_x, J_y, J_z ed in particolare quindi con J_z (tra poco lo dimostriamo) ma risulta anche $[H_0, J_z] = 0$ ← Quindi l'introduzione della perturbazione NON modifica le misure in J_z, costruiamo quindi una base con $|E_n^0, J_z\rangle$ (1)

ma anche $[H, J_z] = 0 \Rightarrow |E_n(\lambda), J_z\rangle$ (2)

Ora nelle DUE BASI (1) e (2) l'insieme dei vettori che hanno lo stesso valore di J_z forma un sottospazio ORTOGONALE all' insieme dei vettori che hanno J_z diverso.

$$\Rightarrow |E_n(\lambda), J_z\rangle = \sum c_\ell |E_n^0, J_z\rangle$$

È LO STESSO — questa è la cosa meno banale

$\Rightarrow$ la degenerazione dello stato fondamentale le scriviamo

$$\begin{cases} |E_0\,,\, J_z = +\tfrac{1}{2}\hbar\rangle \\ |E_0\,,\, J_z = -\tfrac{1}{2}\hbar\rangle \end{cases}$$

avendo scelto $J_z = \pm\frac{1}{2}\hbar$

N.B. $J_z \equiv S_z$ SOLO per lo STATO FONDAM. per i successivi è diverso

Una volta fatto questo il problema si spezza immediatamente in due problemi separati.

Mostriamo ora che $[\underline{L}\cdot\underline{S}\,,\,J_z] = 0$

il conto è istruttivo perché insegna che lo stesso commutatore vale $\forall\,\underline{P}$ quando $\underline{P}$ venga sostituito ad $\underline{L}$

$$[\underline{L}\cdot\underline{S}\,,\,J_z] = [L_x S_x + L_y S_y + L_z S_z\,,\,J_z] =$$

$$= [L_x, L_z] S_x + L_x [S_x, S_z] + [L_y, L_z] + L_y [S_y, S_z] + \text{zero} =$$

uso ora le formule $[L_x, L_z] = -i\hbar L_y$

$[L_y, L_z] = i\hbar L_x$

il conto si fa in $\underline{L}$, ma dalle regole di selezione abbiamo visto

$[V_x, L_z] = -i\hbar V_y$

$[V_y, L_z] = i\hbar V_x$

queste sono la definizione di OPERATORI ($\underline{V}$) che hanno le proprietà dei vettori.

(avere un vettore significa avere certe proprietà di trasformazione sotto i vettori)

$$= -i\hbar L_y S_x - i\hbar S_y L_x + i\hbar L_x S_y + i\hbar L_y S_x = 0$$

discorso vale ESATTAMENTE UGUALE SOSTITUENDO $\vec{P}$ ad $\vec{L}$ viene la stessa identità e allo stesso modo il commutatore è zero

Quindi lo stato fondamentale imperturbato lo possiamo scrivere

$$|u_0\rangle_x |u_0\rangle_y |u_0\rangle_z |S_z = +\tfrac{\hbar}{2}\rangle = |E_0 = \tfrac{3}{2}\hbar\omega,\ J_z = +\hbar/2\rangle$$ essendo in tal caso $l=0$

$$|u_0\rangle_x |u_0\rangle_y |u_0\rangle_z |S_z = -\tfrac{\hbar}{2}\rangle = |E_0 = \tfrac{3}{2}\hbar\omega,\ J_z = -\hbar/2\rangle$$

Lavoreremo quindi nei sottospazi a J_z fissato

$$|E_0(\lambda), J_z = +\hbar/2\rangle = |E_0^0, J_z = \tfrac{1}{2}\hbar\rangle + \sum_{l\neq 0} C_l(\lambda)|E_l, J_z = \hbar/2\rangle$$

una volta preso $J_z = \frac{1}{2}\hbar$ lo stato fondamentale NON È più degenere. Posso quindi scrivere

$$E_0(\lambda) = E_0^0 + \lambda E_0^1 + \lambda_0^2 E_0^2$$

↳ CORREZIONE AL 1° ORDINE DELL'ENERGIA

ora $E_0^1 = \langle E_0, J_z = \frac{1}{2}\hbar|\vec{P}\cdot\vec{S}|E_0, J_z = \frac{1}{2}\hbar\rangle \sqrt{\frac{\omega}{m\hbar}} =$

$$= \sqrt{\frac{\omega}{m\hbar}} \sum_{j=1}^{3} \langle u_0|P_j|u_0\rangle\langle \chi_+|S_j|\chi_+\rangle$$ N.B. $P_j = P_x, P_y,$

ora $\langle u_0|P_x|u_0\rangle = 0$ infatti $\int \psi^* \frac{d}{dx}\psi(x) = 0$ SEMPRE

gli elementi di matrice sono tutti nulli, sia se ψ è simmetrica sia se ψ è antisimmetrica (la derivata esclude la simmetria)

2° ordine

$$\sum_{n\neq 0}\sum_l C(n,l)\,|\overbrace{(\tfrac{3}{2}+n)\hbar\omega, l, J_z = 1/2}^{\varphi_n^0}\rangle$$

↳ DEGENERAZ.

inoltre $|u_{nx}\rangle|u_{ny}\rangle|u_{nz}\rangle$

$$C_{n,l} = \langle \varphi_{nl}|\vec{P}\cdot\vec{S}|\varphi_0\rangle$$

$$c_{m,\ell} = \frac{\langle (\frac{3}{2}+m)\hbar\omega, \ell, J_z = \frac{1}{2}\hbar | \vec{P}\cdot\vec{S} | \frac{3}{2}\hbar, \ell=0, J_z = \frac{1}{2}\hbar\rangle \sqrt{\frac{\omega}{m\hbar}}}{E_m^0 - E_0^0} \qquad m=0$$

$E_m^0 - E_0^0 \simeq -m\hbar\omega$

$\ell=0$ xchè è lo stato FONDAM. che non ha degenerazione.

esplicitiamo il prodotto scalare

$$\sum_{1}^{3}{}_j \langle \hbar\omega(\tfrac{3}{2}+m), \ell, J_z = \tfrac{\hbar}{2} | P_j S_j | \tfrac{3}{2}\hbar\omega, J_z = \tfrac{1}{2}\hbar\rangle =$$

questo è l'elemento di matrice che bisogna calcolare

$$= \sum_{1}^{3}{}_j \langle u_{mx}|\langle u_{my}|\langle u_{mz}|(a_j^+ - a_j)|u_{0x}, u_{0y}, u_{0z}\rangle \langle \cdot\cdot | S_j | \cdot\cdot\rangle$$

es. se ho a_z l'unico contributo è quello con $\langle 0,0,1|0,0,1\rangle$ quindi gli unici m diversi da zero sono quelli per $m=1$ (non abbiamo somme in m ma solo in ℓ)

$m=1 \Rightarrow$ 3 STATI POSSIBILI

$|1\rangle|0\rangle|0\rangle = |u_{1x}, u_{0y}, u_{0z}\rangle$
$|0\rangle|1\rangle|0\rangle = |u_{0x}, u_{1y}, u_{0z}\rangle$
$|0\rangle|0\rangle|1\rangle = |u_{0x}, u_{0y}, u_{1z}\rangle$

questi contribuiscono nello spazio degli stati con $J_z = \hbar/2$

Si HA (c.f.r. esercizio Falcioni del 10-11-95)

$$|u_{0x}\rangle|u_{0y}\rangle|u_{1z}\rangle|S_z = \hbar/2\rangle = |\ell=1, m=0\rangle|S_z = \hbar/2\rangle \qquad S_z \equiv J_z$$

$$\frac{|u_{1x}\rangle|u_{0y}\rangle|u_{0z}\rangle + i\,|u_{0x}\rangle|u_{1y}\rangle|u_{0z}\rangle}{\sqrt{2}}|S_z = -\hbar/2\rangle = |\ell=1, m=1\rangle|S_z = -\hbar/2\rangle$$

$$\frac{|u_{1x}\rangle|u_{0y}\rangle|u_{0z}\rangle - i\,|u_{0x}\rangle|u_{1y}\rangle|u_{0z}\rangle}{\sqrt{2}}|S_z = \hbar/2\rangle = |\ell=1, m=-1\rangle|S_z = +\hbar/2\rangle$$

* mi da $S_z = \hbar/2$ $\quad (L_z + S_z)$

** mi $S_z = -\hbar/2$

Se scelgo la correzione al 1° ordine

$$|E_0^{\lambda}, J_z = \hbar/2\rangle = |E_0^{\circ}, J_z = \hbar/2\rangle + \lambda \sum_{-1}^{1} {}_e\, c_e(\cdots)\,|\;\rangle$$

coefficienti

N.B. gli elementi di matrice si possono fattorizzare in termini di P (che agisce solo su parte spaziale) e in termini di S che agisce solo su parte di spin

Calcolo $c_{m,l}$, partiamo dallo STATO $|u_{0x}\rangle|u_{0y}\rangle|u_{1z}\rangle$

contributo di P_z

$$\langle u_{0x}|\langle u_{0y}|\langle u_{1z}|\, P_z\, |u_{0x}\rangle|u_{0y}\rangle|u_{0z}\rangle \langle S_z = \hbar/2|\, S_z\, |S_z = \hbar/2\rangle$$

$$\Rightarrow 1\,\langle u_1|\, P_z\, |u_0\rangle\, \hbar/2$$

il contributo di P_y è identicamente nullo

" " " P_x " " "

STATO $|u_{0x}\rangle|u_{1y}\rangle|u_{0z}\rangle$ (uso * pag. preced)

$$\langle S_z = \hbar/2|\, S_x\, |S_z = \tfrac{\hbar}{2}\rangle = (?)$$

$$\hbar\,\langle u_0|\, P_z\, |u_1\rangle \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)$$

risultato finale

$$\boxed{E_0(\lambda) = \frac{3}{2}\hbar\omega + \lambda^2 \frac{3}{8}\hbar\omega}$$

Soluzione esercizio 2

$$H_0 = \frac{1}{2mR^2}\vec{L}_1^2 + \frac{1}{2mR^2}\vec{L}_2^2 + \frac{1}{mR^2}\vec{L}_1\cdot\vec{S}_1 + \frac{1}{mR^2}\vec{L}_2\cdot\vec{S}_2 =$$

$$= \frac{J_1^2}{2mR^2} + \frac{J_2^2}{2mR^2} - \frac{\hbar^2}{2mR^2}\frac{3}{2}$$

costanti del moto

$J_1^2,\ J_2^2,\ J_{1z},\ J_{2z},\ L_1^2,\ L_2^2,\ S_1^2,\ S_2^2,\ J^2$

sappiamo che $\ell_1 = \ell_2 = 1$ per stati di singola particella

base naturale, visto che non c'è interazione, è

$|J_1, J_{1z}\rangle|J_2, J_{2z}\rangle$, il sistema delle 2 particelle vive

in uno spazio a

$$\left[\left(2\cdot\frac{3}{2}+1\right)+2\right]^2 = 36 \text{ DIMENSIONI}$$

Non tutti i vettori sono fisicamente interessanti

devo considerare solo combinazioni ANTISIMMETRICHE

CASO $\quad |j_1 = \frac{3}{2}, j_{1z}\rangle|j_2 = \frac{3}{2}, j_{2z}\rangle$

in questo caso $J_{TOT} = 3, 2, 1, 0$

sicuramente non c'è $|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle_1|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle_2$ perchè non è

antisimmetrico né antisimmetrizzabile, così non c'è

$|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle_1|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle_2$, $|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle_1|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle_2$, $|\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle|\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle$

Vedi esercizio Falciani a pag 115

Rimangono 12 stati che non hanno parità definite, di questi si avranno 6 combinazioni simmetriche e 6 combinazioni antisimmetriche

USO LA SEGUENTE NOTAZIONE COMPATTA

$$|\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\rangle|\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}\rangle_A = \frac{|\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\rangle|\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}\rangle - |\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$|\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\rangle|\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle_A$$

$$|\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\rangle|\tfrac{3}{2},-\tfrac{3}{2}\rangle_A = \frac{|\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\rangle|\tfrac{3}{2},-\tfrac{3}{2}\rangle - |\tfrac{3}{2},-\tfrac{3}{2}\rangle|\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\rangle}{\sqrt{2}} \equiv |\psi_1\rangle$$

$$|\tfrac{3}{2},+\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle_A = \frac{|\tfrac{3}{2},+\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle - |\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{3}{2},+\tfrac{1}{2}\rangle}{\sqrt{2}} \equiv |\psi_2\rangle$$

$$|\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{3}{2},-\tfrac{3}{2}\rangle_A$$

$$|\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{3}{2},-\tfrac{3}{2}\rangle_A$$

questi sono i 6 stati ANTISIMMETRICI che considero nel caso $|\tfrac{3}{2},j_{1z}\rangle|\tfrac{3}{2},j_{2z}\rangle$ (*)

c'è poi il caso in cui

$|\tfrac{3}{2},j_{1z}\rangle|\tfrac{1}{2},j_{2z}\rangle$ e $|\tfrac{1}{2},j_{1z}\rangle|\tfrac{3}{2},j_{2z}\rangle$

Ciascuno di questi dà luogo a 8 stati di simmetria non definita, mettendoli insieme si hanno 8 stati simmetrici ed 8 stati antisimmetrici (**)

indichiamo con la notazione

$|\tfrac{3}{2},m\rangle|\tfrac{1}{2},m'\rangle$ gli 8 STATI ANTISIMMETRICI

Rimane il caso in cui $|\tfrac{1}{2},j_{1z}\rangle|\tfrac{1}{2},j_{2z}\rangle$ ed lo stato antisimmetrico che consideriamo è quello di SINGOLETTO (***)

Gli autostati con energia più grande appartengono certamente al 1° gruppo (*) (quello che comprende 6 stati)

sostituendo in H ..

$$\frac{30}{8mR^2}\hbar^2 - \frac{\hbar^2}{2mR^2}\frac{3}{2}$$ 6 VOLTE DEGENERE (*)

$$\frac{\left(\frac{15}{4}+\frac{3}{4}\right)\hbar^2}{2mR^2} - \frac{\hbar^2}{2mR^2}\frac{3}{2}$$ 8 VOLTE DEGENERE (**)

Tra autostati con max energia quelli con autovalore $J_z=0$ sono $|\Psi_1\rangle$ e $|\Psi_2\rangle$ e sono quindi DEGENERI (xchè hanno stessa energia)

Consideriamo la perturbazione $\frac{d}{mR^2} l_{1z} \cdot l_{2z}$

$$\begin{pmatrix} \langle\Psi_1|l_{1z}l_{2z}|\Psi_1\rangle & \langle\Psi_1|l_{1z}l_{2z}|\Psi_2\rangle \\ \langle\Psi_2|l_{1z}l_{2z}|\Psi_1\rangle & \langle\Psi_2|l_{1z}l_{2z}|\Psi_2\rangle \end{pmatrix}$$

Matrice viene già diagonale

È ora necessario scrivere $|\Psi_1\rangle$ e $|\Psi_2\rangle$ in termini di autostati di l_{1z} ed l_{2z}

N.B. $J_z = l_{1z} + S_{1z} + l_{2z} + S_{2z}$

ora

$\ell^2\ s^2\ I^2\ \Sigma_z \qquad \ell^2\ s^2\ \ell_z\ s_z$

- $|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle = |\ell=1, m=1\rangle|\chi_+\rangle \Rightarrow |1,\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle = |1,\frac{1}{2},1\frac{1}{2}\rangle$
- $|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\rangle = |\ell=1, m=-1\rangle|\chi_-\rangle \Rightarrow |1,1/2,3/2,-3/2\rangle = |1,1/2,-1,-1/2\rangle$

$$|\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}\rangle = J^-|\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\rangle = L^-|\ell=1,m=1\rangle|\chi_+\rangle + S^-|\chi_+\rangle|\ell=1,m=1\rangle$$
$$=\sqrt{2}|\ell=1,m=0\rangle|\chi_+\rangle + |\chi_-\rangle|\ell=1,m=1\rangle$$

- $|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle = \dfrac{\sqrt{2}|\ell=1,m=0\rangle|\chi_+\rangle + |\chi_-\rangle|\ell=1,m=1\rangle}{\sqrt{3}}$
- $|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\rangle = \dfrac{\sqrt{2}|\ell=1,m=0\rangle|\chi_-\rangle + |\chi_+\rangle|\ell=1,m=-1\rangle}{\sqrt{3}}$

devo considerare combinazioni antisimmetrizzate

considero $\langle\psi_1|L_{1z}L_{2z}|\psi_1\rangle$ sopravvivono solo

elementi con estremi uguali : $\frac{3}{2},\frac{3}{2}$ oppure $\frac{3}{2},-\frac{3}{2}$

$\langle 1,1|L_{1z}|1,1\rangle\ \langle 1,-1|L_{2z}|1,-1\rangle$

$$=\underbrace{\langle\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}|L_{1z}|\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\rangle}_{=1\hbar}\underbrace{\langle\tfrac{3}{2},-\tfrac{3}{2}|L_{2z}|\tfrac{3}{2},-\tfrac{3}{2}\rangle}_{=-1\hbar} + \underbrace{(1\Leftrightarrow 2)}_{\text{ESPRESSIONE OTTENUTA SCAMBIANDO 1 CON 2 (INDICI)}} =$$

$= -\hbar^2 - \hbar^2 = -2\hbar^2$

per l'altro termine si hanno conti ~~[illegible]~~ omologhi

mentre i termini NON DIAGONALI SONO NULLI

$\langle\psi_1|L_{1z}L_{2z}|\psi_2\rangle = {}_1\langle\frac{3}{2},\frac{3}{2}|{}_2\langle\frac{3}{2},-\frac{3}{2}|L_{1z}L_{2z}|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle_1|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\rangle_2 =$

per le regole di selezione

$\langle 1,1|L_{1z}|1,1\rangle = \hbar\langle 1,1|1,1\rangle = \hbar$

$\langle 1,-1|L_{2z}|1,-1\rangle = -\hbar\langle 1,-1|1,-1\rangle = -\hbar$

Prova di esonero di Istituzioni di Fisica Teorica
12-gennaio-1996

1) Una particella si muove in uno spazio a una dimensione e la sua Hamiltoniana è:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

dove

$$V(x) = +\infty \qquad x < -L/2$$

$$V(x) = \lambda \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \sin\frac{\pi x}{L} \qquad -L/2 < x < L/2$$

$$V(x) = +\infty \qquad x > L/2$$

Determinare:
a) l'energia dello stato fondamentale fino al II ordine in λ
b) il ket corrispondente fino al I ordine in λ

2) Due particelle identiche di spin $\frac{1}{2}$ e massa m si muovono in uno spazio a tre dimensioni sotto l'azione del seguente potenziale:

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{2} k |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2 \left(1 - \frac{2}{\hbar^2} \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2\right) \qquad k > 0$$

a) Determinare l'energia del livello fondanentale, discutere la sua degenerazione e scrivere i relativi ket.
b)Determinare come si modificano le energie e le relative degenerazioni degli stati di cui al punto a) se si aggiunge all'interazione il termine

$$V' = \alpha(\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2) \cdot \mathbf{L}$$

dove $\mathbf{L}$ è il momento angolare del moto relativo e α è una opportuna costante.

(FALCIONI)

soluzione (3) esercizio

$$H = H_0 + \frac{\lambda(\pi\hbar/L)^2}{2m} \operatorname{sen}\frac{\pi x}{L} \qquad -\frac{L}{2} \le x \le \frac{L}{2}$$

$$E_n = \frac{n^2(\pi\hbar/L)^2}{2m} \qquad n = 1, 2, \dots$$

$$|n\rangle = \begin{cases} \psi_{2k-1}(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos(2k-1)\frac{\pi x}{L} \\ \psi_{2k}(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen}(2k)\frac{\pi x}{L} \end{cases} \qquad k = 1, 2, \dots$$

$$|1\rangle \qquad E_1 = \frac{(\pi\hbar/L)^2}{2m}$$

$$E_1(\lambda) = E_1 + \cancel{\lambda\langle 1|U|1\rangle} + \lambda^2 \sum_{n\neq 1} \frac{|\langle n|U|1\rangle|^2}{E_1 - E_n} + \dots$$

perché U (potenziale perturbativo è dispari)

$\langle 1|U|1\rangle$ = potenziale dispari in intervallo simmetrico = 0

$$|1\rangle_\lambda = |1\rangle + \lambda \sum_{n\neq 1} \frac{\langle n|U|1\rangle}{E_1 - E_n} |n\rangle$$

posso avere elem. $\neq 0$ solo se $|n\rangle$ è simmetrico

$$\Rightarrow \quad \langle n = 2k|U|1\rangle =$$

$$= \int_{-L/2}^{L/2} \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen}\left(2k\frac{\pi x}{L}\right) \frac{(\pi\hbar/L)^2}{2m} \underbrace{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L} \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}_{\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right)} dx =$$

$$= \frac{(\pi\hbar/L)^2}{2m} \int_{-L/2}^{L/2} dx \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen}\left(2k\frac{\pi x}{L}\right) \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{1}{2} \operatorname{sen}\frac{2\pi x}{L} =$$

essendo $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

$$= \frac{(\pi\hbar/L)^2}{2m} \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} dx \left\{ \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(2k\frac{\pi x}{L}\right) \right\} \left(\sqrt{\frac{2}{L}} \sin 2\frac{\pi x}{L} \right)$$

unico elem. diverso da zero si ha quando $k=1$

$$\Rightarrow \langle n=2|U|1\rangle = \frac{1}{2}E_1$$

risultato finale

$$|1\rangle_\lambda = |1\rangle - \frac{\lambda}{6}|2\rangle + o(\lambda^2)$$

$$\boxed{E_1(\lambda) = E_1\left(1 - \frac{\lambda^2}{12}\right) + o(\lambda^3)}$$

Soluzione ②

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{2} k |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2 \left(1 - \frac{2}{\hbar^2} \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2\right) \quad (k>0)$$

$$V' = \alpha (\vec{S}_1 + \vec{S}_2) \cdot \vec{L}$$

inizialmente

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) =$$

$$= \frac{P^2}{2M} + \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2} k r^2 \left(1 - \frac{2}{\hbar^2} \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2\right)$$

$M = 2m$ MASSA TOTALE

$\mu = \frac{m}{2}$ MASSA RIDOTTA

$k = \mu\omega^2$

mi metto nel centro di massa
e mi concentro sul moto relativo
studio quindi

$$\tilde{H} = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2} k r^2 \left(1 - \frac{S_T^2 - S_1^2 - S_2^2}{\hbar^2}\right)$$

$$\vec{S_T} = \vec{S_1} + \vec{S_2} \qquad 2 \vec{S_1} \vec{S_2} = S_T^2 - S_1^2 - S_2^2 \qquad S_1 = S_2 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

quindi

$$\tilde{H} = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2} \mu \omega^2 r^2 \left[\frac{5}{2} - \frac{S_T^2}{\hbar^2}\right]$$

particelle hanno spin $1/2$ e possono quindi
trovarsi in stati di singoletto o di tripletto
se si trovano nello stato di singoletto
il termine in parentesi quadre vale $5/2$

quindi nello STATO DI SINGOLETTO
si ha $H_0 = \dfrac{p^2}{2\mu} + \dfrac{1}{2} \mu \omega_0^2 r^2 \qquad \{|\chi_0\rangle\}$

$$\left(\omega_0^2 = \frac{5}{2} \omega^2\right) \quad \omega_0^2 = 5 \omega_1^2$$
$$\omega_0 = \sqrt{5}\, \omega_1$$

se particelle sono nello stato di TRIPLETTO
la loro hamiltoniana è

$$H_1 = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2} \mu \omega_1^2 r^2 \quad \text{dove} \quad \omega_1^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \qquad \{|\chi_1\rangle$$

vediamo che il sistema si può considerare come
sistema di particelle che interagiscono in modo
diverso a seconda del loro stato

ora determiniamo autovalori e autofunzioni dell' energia.

Stati possibili sono:

in corrispondenza e stati di singoletto consideriamo (possibili) le autofunzioni dell' oscillatore tridim. simmetriche che sono quelle con n pari

OSC 3d N.B n = NUMERO ECCITAZ. TOTALE

$$|n = \text{PARI}\rangle = |\ell = 0, 2, 4, \ldots, n\rangle$$

$$|n = \text{DISPARI}\rangle = |\ell = 1, 3, 5, \ldots, n\rangle$$

REM $\vec{\pi} \to -\vec{\pi}$

ma nel nostro oscillatore scambiare particelle significa fare $\vec{\pi} \to -\vec{\pi}$.

(è stessa cosa che fare un cambio di parità)

STATI POSSIBILI DEL SISTEMA

$$\left.\begin{array}{l} |\chi_0\rangle_D \Rightarrow |H_0, n = \text{PARI}\rangle_P |\chi_0\rangle_D \to D \\ |\chi_1\rangle_P \Rightarrow |H_1, n = \text{DISPARI}\rangle_D |\chi_1\rangle_P \to D \end{array}\right\} \text{Fermioni}$$

cerco autostati

$|H_0, n = \text{pari}\rangle|\chi_0\rangle \Rightarrow E_{0,n} = \left(n+\frac{3}{2}\right)\hbar\omega_0 \quad n = \text{pari}$

$|H_1, n = \text{dispari}\rangle|\chi_1\rangle \Rightarrow E_{1,n} = \left(n+\frac{3}{2}\right)\hbar\omega_1 \quad n = \text{dispari}$

Energia + bassa per gli stati di tripletto è quella con $n=1$

$E_{1,n=1} = \frac{5}{2}\hbar\omega_1$

Energia + bassa per gli stati di singoletto è quella con $n=0$

$E_{0,n=0} = \frac{3}{2}\hbar\omega_0 = \frac{3\sqrt{5}}{2}\hbar\omega_1$ essendo $\omega_0^2 = 5\omega_1^2$

$|0\rangle|0\rangle|0\rangle|\chi\rangle_1$

non è degenere

risulta ora $\underbrace{E_{1,n=1}}_{\text{STATO FONDAMENTALE}} < E_{0,n=0}$

degenere 9 VOLTE

$\left.\begin{matrix}|1\rangle|0\rangle|0\rangle & |0\rangle|0\rangle|1\rangle \\ |0\rangle|1\rangle|0\rangle & \end{matrix}\right\}|\chi\rangle_1$

$V' = \alpha(\vec{S}_T)\cdot\vec{L} = \frac{\alpha}{2}\left[(\vec{S}_T+\vec{L})^2 - S_T^2 - L^2\right]$

ora gli stati di singoletto restano a energia inalterata

essendo $S_T = 0$

Vediamo cosa accade ai nove stati iniziali

9 STATI $|l=1\rangle|\chi_1\rangle$ — 5 STATI con $J=2$; 3 STATI con $J=1$; 1 STATO con $J=0$

$|\chi_1\rangle \to$ SPIN TOTALE 1

essendo $\vec{J} = \vec{S}_T + \vec{L}$

energia dei 5 stati $J=2$ è quella

di prima più contributo in totale

5 stati: $E = \frac{5}{2}\hbar\omega_1 + \alpha\hbar^2$

3 stati $E = \frac{5}{2}\hbar\omega_1 - \alpha\hbar^2$.

1 stato $E = \frac{5}{2}\hbar\omega_1 - 2\alpha\hbar^2 \longrightarrow$ se $\alpha > 0$ è il più basso

si riduce la degenerazione

se $\alpha > 0$ stato fondam. non è più degenere $\Rightarrow g = 1$

se $\alpha < 0$ stato fondam. è ancora degenere ma

la degenerazione è ridotta a 5 Perché?

$\Downarrow$

$g = 5$ $E = \frac{5}{2}\hbar\omega_1 + \alpha\hbar^2$ è il più piccolo.

PERTURBAZIONI

Correzione al 1° ordine NON degenere

$\boxed{\text{AUTOVALORE}}$ $\quad \mathcal{E}_1 = \lambda \langle \varphi_n | \hat{W} | \varphi_n \rangle$

dove l'indice n indica il livello di energia considerato (fondamentale, 1° eccitato, 2° eccitato, ecc...)

$|\varphi_n\rangle$ è ~~[illegible]~~ Autovettore dell' hamiltoniana imperturbata

$\boxed{\text{AUTOVETTORE}}$

$$|1\rangle = \sum_{p \neq n} \frac{\langle \varphi_p | \lambda \hat{W} | \varphi_n \rangle}{E_n^0 - E_p^0} |\varphi_p\rangle$$

dove $|\varphi_n\rangle$ è l'autovettore dell' hamiltoniana imperturbata al livello considerato

$|\varphi_p\rangle$ sono gli autovettori dell' hamiltoniana imperturbata relativi a tutti i livelli energetici escluso quello considerato (es. $\varphi_{n=0} \Rightarrow \varphi_{p=1,2,3,4}$

oppure $\varphi_{n=1} \Rightarrow \varphi_{p=0,2,3,4,\dots}$)

(Analogamente per $E_n^0 - E_n^p$ dove l'indice 0 indica gli autovalori dell' hamiltoniana imperturbata)

Correzione al 2° ordine non degenere

$$\mathcal{E}_2 = \sum_{p \neq n} \frac{|\langle \varphi_p | \lambda \hat{W} | \varphi_n \rangle|^2}{E_n^0 - E_0^p}$$

Istituzioni di Fisica Teorica – I prova di esonero

2/4/98

1) Si considerino gli operatori

$$A = |\alpha\rangle\langle\gamma| \quad \text{e} \quad B = |\gamma\rangle\langle\beta|$$

dove la tripletta di vettori $|\alpha\rangle, |\beta\rangle, |\gamma\rangle$ è una base ortonormale completa.

i) calcolare $[A, B]$.

ii) Calcolare il valore medio di A e di B nello stato associato al vettore

$$|\psi\rangle = |\alpha\rangle + 3|\gamma\rangle$$

iii) gli operatori A e B sono degli osservabili?

2) Sia $|\psi\rangle$ lo stato di una particella.
Calcolare: $\langle\psi|X|\psi\rangle$ e $\langle\psi|X^2|\psi\rangle$
sapendo che:

$$\langle x|\psi\rangle = \frac{N}{\sqrt{1+x^2}}$$

NB La soluzione esatta di questi due esercizi è una condizione necessaria per la valutazione del terzo esercizio.

3) Al tempo $t=0$ lo stato di un oscillatore armonico di massa m e pulsazione ω è descritto dalla funzione d'onda

$$\Psi(x,t=0)=\left(\frac{m\omega}{4\pi\hbar}\right)^{1/4}\left[1+\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} x\, e^{i\beta}\right] e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

dove β è una fase reale.

i) determinare β in modo che il valore medio di X all'istante iniziale sia 0

ii) Calcolare

$$\langle\Psi,t|P|\Psi,t\rangle \quad e \quad \langle\Psi,t|P^2|\Psi,t\rangle$$

Formulario:

$$X=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a^+ + a) \qquad P=\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\,(a^+ - a)\, i$$

$$[a,a^+]=1 \qquad a^+a\,|u_n\rangle = n\,|u_n\rangle \qquad a\,|u_n\rangle=\sqrt{n}\,|u_{n-1}\rangle,$$

Dove $|u_n\rangle$ è l'autovettore di $H=\frac{P^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$ con autovalore $(n+\frac{1}{2})\hbar\omega$

$$\langle x|u_n\rangle=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\, e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}\, H_n\!\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x\right)$$

$H_n(\xi)$ sono i polinomi di Hermite e in particolare

$$H_0=1\ ,\quad H_1(\xi)=2\xi\ ,\quad H_2(\xi)=4\xi^2-2\ ;$$

$$H_3(\xi)=8\xi^3-12\xi$$

Istituzioni di Fisica Teorica
II esonero - 23/4/1998

1) Lo stato di una particella vincolata a muoversi sulla superficie di una sfera di raggio fissato R è descritto dal ket

$|\psi\rangle$: $\quad L^2|\psi\rangle = 2\hbar^2|\psi\rangle \quad$ e $\quad L_z|\psi\rangle = \hbar|\psi\rangle$

Calcolare:

a) $\langle\psi|L_x|\psi\rangle$

b) la probabilità di trovare la particella con un angolo azimutale φ compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$

NB la soluzione esatta di questo esercizio è una condizione necessaria per la correzione dell'esercizio successivo.

2) Due particelle identiche di massa m e spin ½ sono descritte dalla seguente Hamiltoniana

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} + V_L(x_1) + V_L(x_2) - (S_{1z} + S_{2z})\frac{A}{\hbar}$$

dove $V_L(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-L/2, L/2] \\ +\infty & x \notin [-L/2, L/2] \end{cases} \qquad A = \frac{4\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$

i) determinare l'energia dello stato fondamentale e dei primi ~~tre~~ livelli eccitati scrivendo le relative funzioni d'onda.

ii) determinare, al primo ordine perturbativo, le correzioni alle energie di questi livelli se viene aggiunta l'interazione $V = \lambda\, x_1 x_2\, \underline{S}_1 \cdot \underline{S}_2$

Formulario:

$[L_x, L_y] = i\hbar L_z$; $L_+ = L_x + iL_y$; $L_- = L_x - iL_y$

$$L_+ |\ell, m\rangle = \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m+1)}\, |\ell, m+1\rangle$$

$$L_- |\ell, m\rangle = \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m-1)}\, |\ell, m-1\rangle$$

$$Y_0^0(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \qquad Y_1^{\pm 1}(\theta,\varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta\, e^{\pm i\varphi}$$

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$$

autovalori e autofunzioni di una particella di massa m vincolata nel segmento $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$

$$E_n^+ = \frac{(2n+1)^2 \hbar^2 \pi^2}{2 m L^2} \qquad \psi_n^+(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos(2n+1)\pi\frac{x}{L}$$

$$E_n^- = \frac{(2n)^2 \hbar^2 \pi^2}{2 m L^2} \qquad \psi_n^-(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin 2n\pi\frac{x}{L}$$

$n = 0, 1, 2$

$$\int x \sin x\, dx = \sin x - x \cancel{\sin x}\ \cos x$$

$$\int x \cos x\, dx = \cos x + x \sin x$$

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2 \sin\alpha \cos\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2 \cos\alpha \cos\beta$$