PROVA SCRITTA DIE SAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

10/10/70

- Risolvere due problemi a scelta dei tre proposti ognuno su un foglio separato (indicare su ogni foglio l'indirizzo di studio).
- Consegnare bella e brutta copia in modo da poter controllare i calcoli effettuati.
- E' permessa la consultazione di testi.

Esercizio n. 1

Una particella di spin ½ in campo centrale, di Hamiltoniana

(1) $$H_0 = \frac{p^2}{2m} + U(r)$$

si trova in un autostato di H_0 di autovalore $E^{(0)}$ descritto dalla funzione d'onda

(2) $$\psi_1 = f(r)\, Y_{10}(\theta,\varphi)\, \chi_+ \quad ; \quad \int_0^\infty |f(r)|^2 r^2 dr = 1$$

dove $Y_{10}(\theta,\varphi)$ è l'autofunzione del momento angolare orbitale L^2 e della sua componente L_z di autovalore $\ell = 1$ ed $m = 0$ rispettivamente, e χ_+ è l'autofunzione della componente S_z dello spin di autovalore $\frac{\hbar}{2}$.

In presenza di un potenziale aggiuntivo

(3) $$\lambda V = \lambda \vec{L}\cdot\vec{S}$$

l'Hamiltoniana totale diventa

$$H = H_0 + \lambda V$$

Le autofunzioni esatte di H si possono classificare come autofunzioni simultanee di H_0, L^2, J^2 e J_z essendo

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

a) Perché?

b) Scrivere gli autovalori esatti di H in funzione degli autovalori di H_0, J^2, L^2.

c) La funzione d'onda (2) si può scrivere come combinazione lineare di due autofunzioni esatte di H.

I* PROVA DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

del 30/11/1979 - A.A. 1979-80

1) Sia dato un sistema di N particelle distinguibili, ciascuna delle quali può trovarsi in un livello energetico appartenente ad uno spettro di livelli discreti ed equispaziati ($E_R = Ra$, $R = 0,1,2,\ldots$, $a > 0$), in cui il livello di energia E_R contiene R+1 stati distinti (cioè il livello fondamentale ($R = 0$) non è degenere, il livello successivo ($R = 1$) contiene due stati, e così via). Calcolare la funzione di partizione canonica alla temperatura T, l'energia interna U e il limite di U per $T \to \infty$ (si ricordi che:
$$\sum_k k e^{-k\nu} = -\frac{d}{d\nu}\sum_k e^{-k\nu}\ )$$

2) Si consideri il caso di un gas quantistico di particelle non interagenti. Le particelle sono bosoni di spin zero, ed il loro numero è esattamente conservato (μ = potenziale chimico $\neq 0$). La massa di ciascuna delle particelle è uguale a zero, per cui la relazione tra impulso p ed energia E è $E = cp$, ove c è la velocità della luce nel vuoto.

a) Mostrare che il limite classico (T grande, μ negativo e grande in valore assoluto) il gas obbedisce all'equazione di stato $pV = NKT$.

b) Determinare la temperatura critica T_0 (al di sotto della quale si ha la condensazione di Bose-Einstein) in funzione di N e V.

c) Per $T < T_0$, determinare il numero di particelle nello stato fondamentale ($E = 0$) in funzione di N, T e T_0.

(Si ricordi che $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$)

lic

TERZA PROVA DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

DEL 7/2/80 - A.A. 1979-80

1) Si consideri un oscillatore armonico tridimensionale, di hamiltoniana

$$H = \frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2+z^2)$$

Gli autostati di H dipendono da tre numeri interi positivi o nulli n_x, n_y, n_z:

$$E(n_x, n_y, n_z) = \hbar\omega\,(n_x+n_y+n_z+3/2)$$

$$\psi_E \equiv \psi_{n_x, n_y, n_z}$$

a) Esprimere gli operatori di momento angolare L_x, L_y, L_z in funzione degli operatori di innalzamento e abbassamento pertinenti ai vari gradi di libertà, a_x, a_x^+, a_y, a_y^+, a_z, a_z^+, definiti nella maniera usuale:

$$a_x = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(P_x - im\omega x) \text{ etc.}$$

e calcolare il commutatore di L_z con n_z, ove $n_z = a_z^+ a_z$.

b) Considerati i tre autostati con $n_x+n_y+n_z=1$, determinare le loro combinazioni che corrispondono agli autostati di L_z e calcolare i corrispondenti autovalori.

2) Una particella di spin $\frac{1}{2}$ si trova in uno stato di spin in cui il valor medio di s_x è $\frac{\hbar}{2}\alpha$ e quello di s_y è $\frac{\hbar}{2}\beta$, con α e β compresi tra -1 e 1.

Mostrare che dove valere la condizione $\alpha^2+\beta^2 \leq 1$, e che per $\alpha^2+\beta^2 < 1$ il problema ammette due soluzioni, mentre per $\alpha^2+\beta^2=1$ se ne ha una sola.

In quest'ultimo caso, calcolare le probabilità di trovare lo spin della particella orientato parallelamente o antiparallelamente all'asse z.

TERZO COMPITO DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA del 13/6/1980

A.A. 1979-80 - Prof. G. Altarelli

Una particella di massa m e spin 1/2 è confinata nel segmento $0 \leq X \leq L$ e immersa in un campo magnetico B uniforme e costante diretto lungo l'asse X, di modo che all'interno del segmento l'hamiltoniana completa è:

$$H = \frac{P^2}{2m} - \mu B S_x \qquad (0 \leq x \leq L)$$

Determinare autofunzioni e autovalori dell'energia.

Al tempo t = o la particella è in uno stato con

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \; ; \; \frac{L}{2} - \overline{X} = 0 \; ; \quad \overline{E} = \frac{7\hbar^2\pi^2}{8mL^2}$$

ottenuto come sovrapposizione dei due stati con più basso P^2.

Determinare la funzione d'onda di tale stato.

Calcolare in funzione del tempo la probabilità di trovare $S_y = +\hbar/2$

ESAME DI ISTITUZI... ...ISICA TEORICA DELL' 11/7/1980
Sessione Esti... A.A. 1979-1980
G. A...arelli

1) Un solido contiene N nuclei non interagenti di spin 1 distinguibili (perchè in siti reticolari differenti). Ciascun nucleo può essere in uno qualsiasi dei tre stati di spin con $m = \pm 1, 0$. Per le interazioni elettriche con i campi interni del solido, un nucleo nello stato $m=1$ oppure $m=-1$ ha la stessa energia $\epsilon > 0$, mentre l'energia è zero nello stato $m=0$. Trascurando ogni altro termine nell'hamiltoniana dei nuclei si calcoli:

a) la funzione di partizione canonica;
b) l'entropia S complessiva degli N nuclei;
c) il calore specifico nel limite $\epsilon/kT \ll 1$;

2) Si consideri per un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω l'equazione agli autovalori:

$$a\,\phi_\lambda = \lambda\,\phi_\lambda$$

dove a è l'operatore di abbassamento degli indici: $a = \sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega}}\left(\omega x + i\dot{x}\right)$
e λ un numero complesso.
Determinare le autofunzioni ϕ_λ.
Calcolare i valori medi dell'energia e della posizione nello stato ϕ_λ (per λ generico).

3) L'hamiltoniana di un rotatore è data da

$$H = AL^2 + BL_z$$

dove $\vec{L}$ è il momento angolare orbitale e A e B sono costanti. Inizialmente il rotatore è nello stato

$$\psi(\theta,\varphi,t=0) = k\,(r-2x)$$

con k uguale a una costante.
Determinare l'evoluzione temporale dello stato e la probabilità di trovare $L^2=2\hbar^2$.

PROVA SCRITTA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

del 3/12/1980 - A.A. 1979-80

1) Un gas di fotoni all'equilibrio si trova racchiuso in una cavità di volume V_i alla temperatura T_i.

Determinare:

a) il lavoro necessario a variare isotermicamente il volume della cavità fino ad un volume V_f.

b) Il lavoro necessario per variare adiabaticamente il volume della cavità fino ad un volume V_f e la temperatura finale T_f

c) Calcolare il rapporto tra il numero totale di fotoni presenti nel volume V_f nei due casi.

2) Si consideri l'hamiltoniana di una particella di spin $\frac{1}{2}$ immersa in un campo magnetico B uniforme e costante che si ottiene trascurando il termine cinetico:

$$H = -\mu \hbar \underline{B} \cdot \underline{\sigma}$$

Si consideri il caso in cui B giace sul piano zx con

$$\epsilon \equiv \frac{B_x}{B_z} \ll 1$$

Si determinino con il formalismo della teoria delle perturbazioni indipendenti dal tempo gli autovalori di H fino all'ordine ϵ^2 incluso, e gli autostati fino all'ordine ϵ.

Si determini poi la soluzione esatta per gli autovalori e gli autovettori.

PROVA SCRITTA D'ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA - 6/2/1981

Gli studenti dovranno risolvere il problema di meccanica statistica più uno a scelta tra i due di meccanica quantistica.

1) Si consideri un sistema costituito da N particelle distinguibili fisse (cioè prive di energia cinetica) e non interagenti, l'energia di ciascuna delle quali può assumere due valori: 0, corrispondente allo stato fondamentale, ed E (diverso da particella a particella) corrispondente allo stato eccitato. Il numero di particelle, il cui livello eccitato è compreso tra E ed E+dE è dato da:

$$dn = \gamma E\, dE \quad (\text{se } E < E_M)$$
$$= 0 \quad (\text{se } E > E_M)$$

dove γ e E_M sono opportune costanti positive.

1) Determinare γ in funzione di N, E_M dalla condizione che il numero totale di particelle sia N.
2) Supponendo il sistema in equilibrio termico a temperatura T, scrivere la funzione di partizione per ciascuna particella e il logaritmo della funzione di partizione per il sistema totale.
3) Calcolare il valore specifico a volume costante dell'intero sistema e discuterne l'andamento per $T \to 0$ e (facoltativo) per $T \to \infty$

2) Una particella di massa μ è vincolata a muoversi sulla superficie di un cilindro di raggio R e asse Z. Essa è soggetta ad una forza di richiamo elastica di costante K verso l'origine sull'asse del cilindro.
- Scrivere l'hamiltoniana della particella in termini delle coordinate cilindriche Z e φ e dei relativi momenti coniugati.
- Determinare gli autovalori dell'energia, e le autofunzioni corrispondenti.
- Al tempo t=0 la funzione d'onda della particella è data da $\psi(z,\varphi,0) = A\, z \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar} z^2\right] \cos^2\varphi$ dove A è una costante. Determinare $\psi(z,\varphi,t)$.

3) Un rotatore quantistico di momento d'inerzia I e momento magnetico $\vec{\mu} = g\vec{L}$ si trova in un campo magnetico $\vec{B}$ costante diretto lungo l'asse y $\left(H = \frac{L^2}{2I} - \vec{\mu}\cdot\vec{B}\right)$. All'istante t=0 sono stati misurati simultaneamente L^2 e L_z con i risultati $2\hbar^2$ e 0 rispettivamente.
- Scrivere la funzione d'onda del sistema ad un tempo t > 0 generico.
- Calcolare il valore medio dell'energia.
- Determinare se e per quali valori di t il sistema si troverà in un autostato di L_x e con quali autovalori.

1° COMPITO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA (Corso Prof. Maiani L.)

del 28/4/1981 - A.A. 1980-81

Si consideri un gas costituito di particelle di spin zero, per cui la relazione tra energia e quantità di moto è

$$\epsilon(p) = \epsilon_0 + \frac{p^2}{2M}$$

e il cui numero non è conservato: μ = potenziale chimico = 0.

Il gas è a temperatura T tale che

$$kT \ll \epsilon_0$$

e quindi:

$$e^{-\epsilon_0/kT} \ll 1$$

1) Calcolare la somma di partizione gran - canonica e verificare che si ottiene lo stesso risultato nella statistica di Bose-Einstein e in quella di Fermi-Dirac, nel limite (2).

2) Approssimando la somma sugli stati con un integrale (limite continuo) calcolare il numero totale di particelle N, e l'energia interna, U, in funzione del volume e della temperatura.

3) Determinare l'equazione di stato del gas.

PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

del 14/9/1981 - A.A. 1980-81

1) Si consideri un sistema costituito da N rotatori quantistici distinguibili non interagenti tra loro e in equilibrio termico a temperatura T. L'Hamiltoniana di ciascun rotatore sia

$$H = \frac{2\pi}{\hbar} A L^2$$

dove $\vec{L}$ è il momento angolare e A è una costante data. Determinare: a) a quale temperatura la probabilità di trovare un rotatore nel livello fondamentale è uguale a quella di trovarlo in un qualsiasi stato del primo livello eccitato; b) il comportamento del calore specifico in funzione di T nelle vicinanze dello zero assoluto.

2) Una particella di massa m è confinata su un segmento $0 \leq x \leq L$ sul quale si muove liberamente. Si sa che la misura della sua energia può dare i valori del primo livello (fondamentale) E_1 e del terzo livello E_3 entrambi con probabilità $\frac{1}{2}$. Si sa inoltre che al tempo t = o la probabilità di trovare la particella al centro del segmento è la massima possibile per un tale stato. Calcolare dopo quanto tempo la probabilità di trovare la particella al centro del segmento è diventata nulla.

3) Una particella di spin $\frac{1}{2}$ si trova al tempo t = o nello stato con spin $+\frac{1}{2}$ lungo l'asse Z. Essa è soggetta ad un'interazione magnetica del tipo

$$H = \frac{A}{\sqrt{2}} \left(\sigma_x + \sigma_y \right) \qquad \text{(A costante)}$$

($\sigma_{x,y}$ sono le matrici di Pauli). Si calcoli dopo quanto tempo la componente lungo l'asse Z dello spin è $-\frac{1}{2}$.

SECONDO COMPITO DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA DEL 19/12/1981 - A.A. 81-82

Proff. G. Altarelli e L. Maiani

Un oscillatore armonico lineare di massa m e pulsazione ω si trova al tempo $t=0$ in uno stato tale che a) misurando l'osservabile aa^+ si trovano solo i valori 1 e 3; b) il valore medio di a^+a è $\frac{1}{2}$ e quello di $aa+a^+a^+$ è zero (ove $a=\left(\frac{m}{2\hbar\omega}\right)^{1/2}(\omega x+i\dot{x})$)

1) Determinare lo stato più generale che obbedisce a queste condizioni.
2) Calcolare in funzione del tempo il valore medio dell'energia potenziale.
3) Se un tale oscillatore si trova ad un dato istante nello stato la cui funzione d'onda è quella dello stato fondamentale di un oscillatore di uguale massa e pulsazione 2ω, qual'é la probabilità che misurando l'energia a tale istante si trovi $\frac{1}{2}\hbar\omega$, cioè quella del suo stato fondamentale?

PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA - SESSIONE ESTIVA DELL'A.A. 1981-82 , 19/6/1982

Proff. G. Altarelli, L. Maiani

1\. - Si consideri il modello di un semiconduttore in cui le bande di valenza e di conduzione, ognuna composta di un numero molto grande di livelli, sono schematizzate da due singoli livelli di energia ϵ_1 e ϵ_2 ($\epsilon_2 > \epsilon_1$), con uguale parametro di degenerazione g.

Per semplicità supponiamo che $g=N$, dove N è il numero totale di elettroni. Si avrà quindi un gas di fermioni con due soli livelli, ognuno dei quali corrisponde a tanti stati quantici degeneri (spin incluso) quanti sono gli elettroni.

Calcolare in funzione della temperatura, di ϵ_1 e di $\epsilon_2 = \epsilon_1 + \Delta\epsilon$

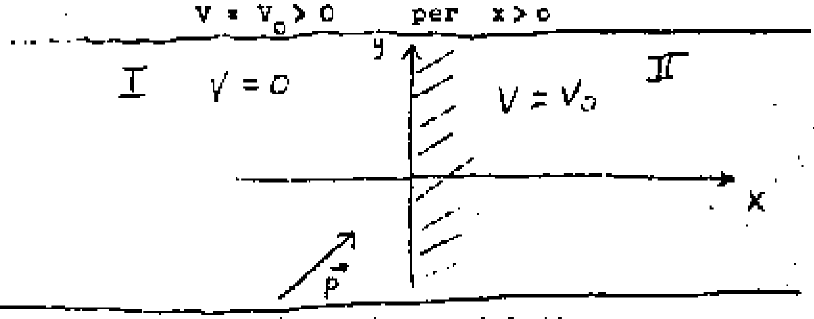
a) Il potenziale chimico μ,

b) I numeri di occupazione dei due livelli,

c) Il calore specifico C_V.

2\. - Si consideri una particella vincolata a stare in un piano e soggetta ad un potenziale:

$$V = 0 \quad \text{per} \quad x < 0$$
$$V = V_0 > 0 \quad \text{per} \quad x > 0$$



Un fascio monocromatico, di quantità di moto

$$\vec{p} = (p_x, p_y)$$

viene inviato dalla zona I. In condizioni stazionarie la funzione d'onda (autofunzione di $H = \frac{p^2}{2m} + V$ con autovalore $E > V_0$) è della forma:

$$\psi(x) = e^{i\frac{\vec{p}\cdot\vec{x}}{\hbar}} + A\, e^{i\frac{\vec{p}\,'\cdot\vec{x}}{\hbar}}$$

$$\vec{p}\,' = (-p_x, p_y)$$

nella regione I, e: $\psi = B\, e^{i\frac{\vec{p}\,''\cdot\vec{x}}{\hbar}}$

nella regione II. Il coefficiente A è associato all'onda riflessa dalla linea di separazione e il coefficiente B all'onda trasmessa. Usando l'equazione di Schrödinger e le condizioni di continuità:

1. Determinare p''_x e p''_y in funzione di p_x, p_y e V_0
2. Determinare A e B
3. Posto: $p_x = p \sin\theta$, $p_y = p\cos\theta$

(θ è l'angolo tra $\vec{p}$ e l'asse y) determinare l'angolo limite e cioè il valore di θ (in funzione di p e di V_0) al di sotto del quale l'onda trasmessa in II diventa un'onda smorzata esponenzialmente, nella direzione dell'asse X.

I COMPITO DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

DEL 14/11/87

1) Si consideri un sistema classico composto da N particelle distinguibili non interagenti che possono muoversi in due dimensioni tale che la hamiltoniana di singola particella sia

$$H = c\,|\vec{p}| + K\,|\vec{r}|^{4}$$

dov $\vec{p} = (p_x , p_y)$

$\vec{r} =$ io vettore $= (x,y)$

c cità della luce $K > 0$

Calcolare usando il canon: l'entropia, l'energia media, e l'energia cinetica media del sistema lcolare anche il potenziale chimico μ in funzione di N e T.

2) Si consideri un gas di N fermioni ultrarelativistici di spin $\frac{1}{2}$ non interagenti allo zero assoluto racchiuso in un cilindro di area di base A e altezza L. Il gas è immerso in un campo esterno tale che la hamiltoniana di singola particella è

$$H = c\,|\vec{p}| + a z \qquad a > 0$$

Determinare l'energia di Fermi supponendo che

a) $\mathcal{E}_F < aL$

b) $\mathcal{E}_F \gg aL$

e determinare nei due casi le corrispondenti condizioni nel [redacted] rapporto $\frac{N}{AL}$.

Determinare inoltre l'energia di Fermi nel limite $L \to \infty$

PROVA D'ESAME SCRITTA DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

del 14/9/88 - A.A. 1987-88

1) Due particelle identiche di massa m si muovono su una retta sottoposte al potenziale

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{4}K_1(x_1+x_2)^2 + \frac{1}{4}K_2(x_1-x_2)^2$$

con x_1, x_2 le coordinate delle due particelle.

1) Determinare i livelli energetici e le rispettive autofunzioni nel caso di particelle.
   a) di spin 0
   b) di spin 1/2
2) Qual'è la degenerazione dei livelli energetici? (non si considerino eventuali degenerazioni accidentali)
3) (Facoltativo) Si determini oltre il livello fondamentale per particelle di spin 1/2 soggette ad un'ulteriore interazione

$$\frac{1}{2}K_1\sqrt{\frac{K_2}{m}}\,\bar{\sigma}_1\cdot\bar{\sigma}_2$$

con σ_i matrici di Pauli.

2) Un gas perfetto classico è costituito da N oscillatori armonici indistinguibili con carica elettrica non nulla, in equilibrio a temperatura T.
Il gas è immerso in un campo magnetico costante $\bar{B} = (0,0,B_z)$ e l'Hamiltoniana di particella singola è

$$H = \frac{\bar{p}^2}{2m} + \mu\,\bar{B}\cdot(\bar{r}\times\bar{p}) + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$

con $p = (p_x,p_y,p_z)$, $r = (x,y,z)$, m massa dell'oscillatore, ω la sua pulsazione e $\mu > 0$ costante. (Essendo il gas considerato perfetto si è trascurata l'interazione Coulombiana tra gli oscillatori).

1) Determinare per quale valore di $\mu = \mu_c$ il sistema diventa instabile, ovvero perde di significato fisico
2) Supposto $\mu < \mu_c$ si calcoli l'entropia del gas e la sua variazione rispetto al caso $B_z = 0$

$$\left(\text{si ricordi che } \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-Ax^2+Bx} = \sqrt{\frac{\pi}{A}}\, e^{\frac{B^2}{4A}}\right)$$

III° ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
Proff.: G. Martinelli, P. Tombesi
A.A. 1988-89

1. Due particelle identiche di spin 1 si trovano in un campo di forza centrale e sono vincolate a muoversi su una sfera di raggio unitario. Il sistema si trova in un autostato della componente z dello spin totale con autovalore zero. $S_z = 0$
1) Determinare lo stato del sistema sapendo che esso si trova in un autostato del momento orbitale totale con autovalore zero, che il valore medio di $(\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2$ e' $2\hbar^2$ e che le ampiezze di probabilita' sono reali e positive.
2) Supponendo invece che le particelle si trovino entrambe in un autostato del momento angolare orbitale con numeri quantici $l_1 = l_2 = 1$ e del momento angolare orbitale totale con numero quantico $l = 1$, determinare il valore medio di $(\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2$

2. Una particella di spin 1/2 si trova all'istante iniziale nello stato
$$\psi(\theta, \varphi, s_z) = Y_{10}(\theta, \varphi)\chi_+$$
l'Hamiltoniana del sistema e' $H = k(\vec{L} + \vec{S})^2$.
1) Determinare il primo istante in cui il sistema riassume la configurazione iniziale, a meno di un fattore di fase globale.
2) Determinare i possibili risultati di una misura dell'energia e le rispettive probabilita'.

PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

dell'1/2/1989

1)

Una particella neutra di massa m, spin S=1 e momento magnetico $\vec{\mu} = g\vec{S}$ è sottoposta ad un campo magnetico uniforme B diretto lungo l'asse y.
Lo stato al tempo t=0 è descritto dallo spinore

$$(\vec{r}, s_y) = A\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

dove $\vec{k}$ ed $\vec{r}$ sono ris...ivamente il vettore d'onda ed il vettore posizione della particella ed A ...ma costante di normalizzazione.
Determinare i possibi... valori di una misura di S_z e le rispettive probabilit... al tempo t=0.
Scrivere l'evoluzione ...mporale dello stato e la probabilità in funzione del tempo di ottenere in ... misura di S_z l'autovalore $+\hbar$.
Dopo quanto tempo l... probabilità di ottenere $S_z = +\hbar$ è uguale a quella iniziale?

2) S1

Un gas di fermioni di spin ½ in due dimensioni, contenuto in un recipiente quadrato di lato L ha una temperatura di Fermi T_F.

a) Calcolare il potenziale chimico in funzione della temperatura.
b) Calcolare per quale temperatura metà dei fermioni hanno una energia maggiore dell'energia di Fermi ϵ_F.

PRIMO COMPITO DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

dell'8/4/1989 A.A. 1988-89

Proff.: M. Lusignoli, A. Pugliese

Si abbia un gas perfetto di N particelle racchiuse in un volume V.
La relazione fra energia ed impulso di ogni particella è la seguente:

$$\varepsilon(\vec{p}) = c\, p_0 \log\left(1+\frac{p}{p_0}\right) \qquad \left[\, p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}\, \right]$$

A) Considerando il sistema come un gas classico di particelle senza spin, calcolarne la funzione di partizione nel ensemble canonico.
Mostrare che esiste una temperatura massima possibile T_M per questo sistema e determinarla.
Calcolare poi, per $T < T_M$, l'energia interna ed il potenziale chimico del gas.

B) Considerando il sistema come un gas quantistico di particelle di spin ½, determinarne nel limite di $T \to 0$ °K l'energia di Fermi e l'energia interna.

C) Discutere il limite per $p_0 \to \infty$ per i risultati ottenuti in A) e B)

D) (Facoltativo)

Considerando il sistema come un gas quantistico di particelle di spin intero discutere se per esso si verifica o no il fenomeno della condensazione di Bose-Einstein.

Formulario:

Per $a > -1$ e $b < -1-a$ si ha

$$\int_0^\infty dx\, x^a (1+x)^b = \frac{\Gamma(a+1)\,\Gamma(-a-b-1)}{\Gamma(-b)}$$

dove Γ è la funzione di Eulero:

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) = n!$$

II° COMPITO DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

del 13/3/1989

Proff. M. Lusignoli e A. Pugliese

1) La funzione d'onda di un oscillatore armonico unidimensionale (di mass m e pulsazione ω) è una sovrapposizione dello stato fondamentale e de secondo stato eccitato tale che all'istante $t = 0$

a) $\overline{p^2} = m^2 \omega^2 \overline{x^2}$

b) $\overline{E} = \frac{7}{6} \hbar \omega$

c) $\overline{px} + \overline{xp} > 0$

Calcoli

Determinare in funzione del tempo

$\overline{p^2(t)}$, $\overline{x^2(t)}$ ed il prodotto delle indeterminazioni

$\Delta x(t) \cdot \Delta p(t)$.

2) Una particella di massa m si muove con moto unidimensionale, soggetta all'azione di un potenziale

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & (|x| > a) \\ \frac{\hbar^2}{m} \eta \, \delta(x) & (-a < x < a) \end{cases}$$

dove $\delta(x)$ è la "funzione" δ di Dirac e $\eta > 0$.

Determinare gli autovalori dell'energia (eventualmente in forma impl e le corrispondenti autofunzioni.

Confrontare i risultati ottenuti con quelli noti per la particella n segmento (cioè, con $\eta = 0$).

COMPITO DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
del 20/6/89 - A.A. 1988-89

1) L'hamiltoniano che descrive l'interazione di due particelle identiche di massa m e spin ½ nel sistema di quiete del loro baricentro è

$$H = \frac{p^2}{m} + \frac{1}{4} m \omega^2 r^2 + 2 A \vec{\ell} \cdot \vec{S}$$

$\ell = 1$

dove $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\vec{\ell}$ sono gli operatori di momento angolare orbitale del moto relativo e $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ quelli dello spin totale.

Determinare per lo stato fondamentale e per il primo stato eccitato gli autovalori dell'energia, il loro grado di degenerazione e le autofunzioni, sapendo che $-\frac{1}{4}\hbar\omega < A < +\frac{1}{4}\hbar\omega$

Facoltativo:

Supponendo $A > 0$, calcolare le correzioni al primo ordine perturbativo agli autovalori determinati in precedenza dovute alla presenza di un ulteriore termine nell'hamiltoniano:

$$V = \lambda (\ell_z + 2 S_z).$$

2) Si consideri un gas perfetto classico di N particelle a temperatura T sottoposte ad un campo esterno di forze.

L'energia di singola particella è

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m} + br$$

con $b > 0$. Le particelle sono vincolate a muoversi all'esterno di una sfera di raggio R e centro nell'origine.

a) Calcolare la funzione di partizione nell'ensemble canonico;

b) Calcolare la pressione esercitata dal gas sulla superficie della sfera anzidetta;

c) Calcolare l'energia interna del gas;

d) Come si comporta il calore specifico per temperature molto maggiori o molto minori di b·R?

Primo Esonero di Istituzioni di Fisica Teorica. 1989

Prof. P.Tombesi, M. A. Virasoro

1. Un gas perfetto composto da N particelle di massa M e' contenuto in un recipiente cilindrico di raggio R ed altezza h. Il sistema e' in presenza di un campo esterno e il cilindro ruota attorno al proprio asse di modo che l'hamiltoniana di singola particella e':

$$H = \frac{p^2}{2m} + az - br^2$$

con a e b costanti positive, z e' la quota a partire della base del cilindro ed r rappresenta la distanza dall'asse del cilindro.

Con il formalismo dell'ensemble Gran-Canonico determinare il potenziale chimico μ in funzione di N, T e dei parametri del cilindro: l'energia interna per particella e la pressione in funzione di r con $0 \le r \le R$.

2. Sia un gas di N fermioni di spin 1/2 non interagenti in un volume V e a 0^0K per i quali il rapporto fra energia ed impulso e':

$$H = \frac{p^2}{2m} + A p^4$$

dove A>0. Calcolare il numero di fermioni con il modulo dell'impulso lineare minore di $p_F/2$ in funzione di N e V. Calcolare l'energia di Fermi.

$$V = h\pi R^2 = z\pi r^2$$

$$\frac{\partial}{\partial V} = \pi r^2 \frac{\partial}{\partial z} + 2\pi r z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$E = \int \frac{d^3p\, d^3q}{h^3}\left(\frac{p^2}{2m} + az - br^2\right) e^{\frac{\mu - \left(\frac{p^2}{2m} + az - br^2\right)}{T}}$$

PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA DEL 7/2/90

FATTO
ANCHE IN AULA

SI

1º Esercizio

Si abbia un gas perfetto di N particelle di massa m racchiuse in un cono di altezza h, raggio di base R, con verti e nell'origine e come asse il semiasse z>0, soggette alla forza peso. Il gas è mantenuto all'equilibrio a temperatura T.

Considerando il sistema come un gas di Boltzmann, calcolare l'energia libera di Helmotz.

Calcolare l'energia interna del sistema e discutere i limiti per temperature molto maggiori e molto minori di mgl/k.

2º Esercizio

Due particelle identiche di spin 1/2 vincolate a muoversi in una dimensione sono descritte dalla seguente Hamiltoniana:

$$H = H_0 + g\vec{B}\cdot(\vec{S}_1+\vec{S}_2)+G\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2$$

dove

4 livelli non degeneri

$$H_0 = p_1^2/2m + p_2^2/2m + 1/2\, k(x_1^2 + x_2^2)$$

e $\vec{B}$ è un campo magnetico diretto secondo l'asse z positivo e le costanti g e G sono positive.

Sapendo che lo stato è autostato di H_0 con autovalore $2\hbar\omega$ ($\omega=\sqrt{k/m}$):

1) Scrivere le autofunzioni di H compatibili con questa informazione e determinare i corrispondenti autovalori.

2) Determinare quale di questi stati ha l'energia più bassa, in funzione del campo magnetico.

3) Determinare per quale valore del campo lo stato di energia più bassa risulta degenere. Qual'è il grado della degenerazione?

$\Delta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} =$

Compito di esonero di Istituzioni di Fisica Teorica
(corso prof. A. Pugliese)
7 - 6 - 91

1) Due particelle identiche di spin o, vincolate a muoversi sulla superfice di una sfera di raggio R, sono soggette alla seguente hamiltoniana:

$$H = \frac{\hbar^2}{2mR^2}(\hat{l}_1^2 + \hat{l}_2^2 + \hat{l}_1 \cdot \hat{l}_2) + \mu_B \vec{B} \cdot (\vec{l}_1 + \vec{l}_2)$$

B (′, O, B).

a) d ... minare le costanti del moto. $\hat{l}_1^2, \hat{l}_2^2$

b) A ... stante iniziale il sistema si trova in un autostato di $\hat{l}_1$ ... con autovalore 2 (per entrambi) e di $\hat{L}_z$ con autovalore 0 ; ... oltre una misura della componente z del momento angolare di ... particella può dare 0 $+1$ o -1 con uguale probabilità ($\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2$) Dete... are ... stato del sistema in funzione del tempo, i possibili ris... ti d... misura della componente z del momento angolare di ... particella e le loro probabilità.

2) U... ettrone ... soggetto al seguente potenziale:

$$V(r) = -\frac{e^2}{r} - \frac{e^2}{r}\exp(r/\lambda a_0) = -\frac{e^2}{r} + V'(r)$$

Considerando $V'(r)$ come una perturbazione calcolare al primo ordine la ~~xxxxxxxx xxxx~~ correzione degli autovalori dell'energia per lo stato fondamentale e per il primo livello eccitato.

Quale è la degenerazione di questi stati ?

Per quali valori di λ ~~xx xxxxx~~ è corretto trattare $V'(r)$ come una perturbazione?

Nota bene:

La parte radiale delle autofunzioni dell'atomo di idrogeno è

$$R_{10}(r) = 2\frac{1}{(a_0)^{3/2}} e^{-\frac{r}{a_0}}, \quad R_{20} = 2\frac{1}{(2a_0)^{3/2}}\left(1 - \frac{r}{2a_0}\right) e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

$$R_{21}(r) = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{(2a_0)^{3/2}}\frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{2a_0}}; \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} \text{ raggio di Bohr}$$

Istituzioni di Fisica Teorica (proff. Lusignoli e Pugliese)

anno accademico 1991-92 - primo semestre

Primo compito di esonero del giorno 11/11/1991

g pari ⇒ Fermioni

Si abbiano N rticelle di massa m e spin $\frac{3}{2}$ non interagenti fra loro e racchiuse in una sfera di raggi Esse sono soggette ad un campo esterno centrale e la loro energia potenziale è

$$U(r) = 0 \qquad (0 \leq r < r_1)$$

$$U(r) = U_1 > 0 \qquad (r_1 \leq r \leq R)$$

1) Considerando il sistema come un gas di Boltzmann a temperatura T, si calcolino:

a) l'energia libera di Helmholtz; b) l'energia interna; c) la frazione di particelle contenute in media nella sfera piú interna, di raggio r_1. Se ne discuta il limite per alte temperature.

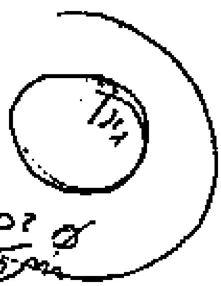
2) Supponendo che il sistema sia invece mantenuto allo zero assoluto, determinare quale è il numero massimo di particelle del sistema affinchè nessuna di esse si venga a trovare a distanza dal centro maggiore di r_1.

3) Discutere i motivi fisici della differenza tra il risultato ottenuto al punto (2) e l'estrapolazione a T=0 del risultato classico (punto 1c).

$\frac{4}{3}\pi r_1^3$

$N(r > r_1) = 0$

N_{max}



$E = \frac{p^2}{2m}$

1o Esonero di Istituzioni di Fisica Teorica del 10 aprile 1992

Prof M.A.Virasor.

1. Esercizio:

Si abbia un gas perfetto di N particelle di massa m racchiuse in un paraboloide cilindrico la cui superficie sodisfa l'equazione:

$$z=a\,r^2$$

(. (r,z,φ) sono le solite coordinate cilindriche. Il paraboloide e . mitato superiormente da un coperchio alla altezza h. Le p icelle sono soggette a una forza di attrazione di tipo a onico di maniera tale che la sua Hamiltoniana e'

$$H= p^2/2m +k\cdot z^2/2$$

Calcolare la funzione di partizione Z canonica di tutto il :ema.

_)Nel limita h->∞ calcolare entropia e energia.

3)Discutere se si sodisfa il principio di equipartizione dell'energia e perche'.

2o. Esercizio

Un gas di fermioni di spin 1/2, in equilibrio alla temperatura T=0° K, e' racchiuso in una scatola di base L^2 ed altezza infinita. I fermioni sono soggeti a una forza verso il basso che deriva da un potenziale:

$$U(z)=\alpha\sqrt{z}$$

1)Conoscendo ϵ_F determinare N

2)Calcolare l'impulso medio che puo' avere un fermione che si trovi ad una altezza z uguale alla meta' di $Z_{massimo}$

II compito di esonero di Istituzioni di Fisica Teorica

14-5-91

1) Si consideri il seguente potenziale

$$V(x) = -\frac{\hbar^2 q^2}{2m} a \left(\delta(x+a) + \delta(x-a)\right) \quad a>0$$

a) Determinare con equazioni implicite gli autovalori negativi dell'hamiltoniana;

b) Discutere se le precedenti equazioni ammettono o meno soluzione.

c) Scrivere la funzione d'onda dello stato fondamentale.

2) Un oscillatore armonico si trova in uno stato tale che:

a) una misura dell'energia può dare o $\frac{\hbar\omega}{2}$ o $\frac{5}{2}\hbar\omega$,

b) la densità di probabilità di trovare la particella nell'origine è nulla.

Determinare a un istante t generico:

a) il valore medio dell'energia,

b) $\overline{p^2}$ e $\overline{x^3}$

c) il prodotto di indeterminazione $\Delta x \Delta p$

Polinomi di Hermite:

$H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$, $H_3(x) = 8x^3 - 12x$

2° Esonero di Istituzioni di Fisica Teorica
18 Maggio 1992

1° Esercizio

Una particella di massa m e soggetta al seguente potenziale:

$$V(x) = \infty \quad \text{per } x \leq -\frac{L}{2},\ x > \frac{L}{2}$$

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{2m}\gamma\delta(x) \ \text{ per } -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}$$

Determina e l'equazione agli autovalori delle autofunzioni pari dell' H oniana $(\psi_n(x) = \psi_n(- \ ))$.

Discutere asi limite $\gamma L << 1$ e $\gamma L >> 1$.

2° Eserciz o

Un oscill e armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω, ritto al tempo $t = 0$ la seguente funzione d'onda:

$$\psi(x) = \frac{2(x/x_0)^2}{(3x_0\sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{x_0})^2} \ \text{with } x_0 = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Determinare:

a) I possibili risultati di una misura dell'energia e la relativa probabilità.

b) in funzione del tempo il valore medio di x^2 e p^2.

Compito di esonero del 6 novembre 1992 di

ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

1) Un gas classico composto da N particelle non interagenti in equilibrio ad una temperatura T è sottoposto all'azione di un campo esterno, tale che l'energia potenziale di singola particella è:

$$V(r) = \frac{1}{2} m\omega^2 (r-L)^2 \, \theta(r-L),$$

dove $L > 0$ è un parametro avente dimensioni di lunghezza. Determinare:

a) il numero medio di particelle che si trovano ad una distanza dall'origine minore di L;

b) l'energia libera di Helmholtz, $F(T,N)$, del sistema.

2) Un gas è composto da N particelle di spin $\frac{1}{2}$ non interagenti e sottoposte all'azione di un campo esterno, tale che l'energia potenziale di singola particella è:

$$V(r) = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 \, .$$

Il sistema è mantenuto allo zero assoluto. Determinare:

a) la massima distanza dall'origine alla quale si può trovare una particella, r_{max};

b) l'energia media per particella;

c) la distanza quadratica media di una particella dall'origine, $< r^2 >$.

Formulario

$$\int_0^1 x^\alpha \sqrt{1-x^2} = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+2\right)}$$

ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA - (prof. M.Lusignoli e A.Pugliese)

Terzo compito di esonero (del 27 gennaio 1993)

Una particella di massa m, spin $\frac{1}{2}$ e carica elettrica q è vincolata a muoversi sulla superficie di una sfera di raggio r ed è soggetta all'azione di un campo magnetico B diretto lungo l'asse z. L'operatore hamiltoniano è quindi ($I \equiv m r^2$)

$$H = \frac{L^2}{2I} - \frac{qB}{2mc}(L_z + 2S_z).$$

All'istante $t = 0$ la particella si trova in un autostato degli operatori di momento angolare totale J^2 e J_z con autovalori $\frac{3}{4}\hbar^2$ e $\frac{1}{2}\hbar$ rispettivamente. Si sa inoltre che la probabilità di ottenere $-\frac{1}{2}\hbar$ come risultato di una misura di S_z è $\frac{1}{3}$ e che il valor medio del coseno dell'angolo θ è il massimo possibile, compatibilmente con i dati precedenti.

(1) Quali risultati si possono ottenere e con quali probabilità facendo una misura dell'energia?

(2) Determinare in funzione del tempo le probabilità dei diversi possibili risultati di una misura di S_z e di L^2, nonchè il valor medio $< \cos\theta >$.

(3) Se all'hamiltoniano si aggiunge una perturbazione

$$\lambda V = \lambda \frac{\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}}{2I},$$

con $\lambda \ll 1$, quali variabili di momento angolare sono ancora costanti del moto ?

(4) Determinare, al primo ordine nella teoria delle perturbazioni, lo spostamento degli autovalori dell'energia di cui alla domanda (1).

Facoltativo: (5) Determinare, al primo ordine nella teoria delle perturbazioni, le correzioni alle autofunzioni associate.

calcolo coeff. Clebsch - Gordan : $|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle = \alpha Y_{10}\chi_+ + \beta Y_{11}\chi_- + \gamma Y_{00}$

impongo $J^2|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$ $\quad J^2 = L^2 + S^2 + 2S_zL_z + S_\mp L_\pm$

e $\langle\cos\theta\rangle = \max$

$\alpha = -\frac{1}{\sqrt{6}}$ $\quad \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad \gamma = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

19 Giugno 1996

III Compito di Esonero di Istituzioni di Fisica Teorica
Corso Serale del Prof. Guido Martinelli
A.A. 1995/96

ESERCIZIO 1

Un sistema unidimensionale è costituito da molecole biatomiche la cui Hamiltoniana è data da

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N} H_i \, ,$$

dove

$$H_i = \frac{(p_1^i)^2}{2m_1} + \frac{(p_2^i)^2}{2m_2} + \frac{g}{2}\left(x_1^i - x_2^i\right)^2 + \lambda x_1^i x_2^i \, .$$

Nel caso classico:

1. Dire quale è la condizione per le costanti g e λ affinchè la funzione di partizione canonica sia definita;

2. Calcolare l'energia libera F, l'energia interna E e il calore specifico c_V.

ESERCIZIO 2

Sia dato un sistema costituito da un gas monoatomico con solo due livelli di energia, ϵ_0 e ϵ_1, corrispondenti ad uno stato fondamentale non-degenere ed a n stati eccitati degeneri (ovvero ci sono n autostati dell'Hamiltoniana con la stessa energia ϵ_1).

L'energia totale per un singolo atomo è dunque data da

$$E_{0,1} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \epsilon_{0,1} \, ,$$

a seconda del livello nel quale si trovi.

1. Calcolare l'energia libera F, l'energia interna E ed il calore specifico c_V;

2. Calcolare a quale temperatura il numero di atomi nello stato fondamentale è l'80 % del totale.

24 Giugno 1996

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica
Proff. Marzio Cassandro, Guido Martinelli e Alessandra Pugliese
A.A. 1995/96

ESERCIZIO 1

Un sistema bidimensionale è costituito da N oscillatori armonici non-interagenti la cui Hamiltoniana è data da

$$H = \sum_{i=1,N} \frac{(p_x^i)^2 + (p_y^i)^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\Big((x^i)^2 + (y^i)^2\Big) .$$

1. Calcolare la funzione di partizione canonica, l'energia libera e l'energia interna nel caso in cui gli oscillatori siano quantizzati;

2. Mostrare che per $kT \gg \hbar\omega$ si ritrovano le stesse espressioni (per la funzione di partizione canonica, l'energia libera e l'energia interna) che per un insieme di oscillatori classici;

3. Nel caso quantistico, se si interpreta il numero quantico principale n dell'oscillatore ($E = \hbar\omega(n+1)$) come il numero di fononi, calcolare il numero totale di fononi in funzione della temperatura (fare l'approssimazione che i livelli siano così vicini da poter sostituire degli integrali alle sommatorie).

ESERCIZIO 2

Sia dato un sistema costituito da due fermioni di spin 1/2 la cui Hamiltoniana è data da

$$H = \sum_{i=1,N} \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m} + \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\Big(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\Big)^2 + \lambda\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \rho\sigma_1^z\sigma_2^z .$$

1. Nel sistema del centro di massa (ovvero senza considerare l'energia relativa al moto del baricentro) si calcolino i primi tre livelli di energia e la relativa degenerazione nel caso in cui $\lambda = \rho = 0$;

2. Si ripeta il calcolo di cui in 1. per $\lambda \neq 0$ e $\hbar\omega \geq \lambda$;

3. Dire che succede al primo ordine in teoria delle perturbazioni quando $\rho \neq 0$.

III Compito di Esonero di Istituzioni di Fisica Teorica 2/2/2001
A.A. 2000–2001
Prof. Guido Martinelli

1 Esercizio n. 1

Sia data una particella di spin 1 e momento angolare orbitale 1, la cui evoluzione temporale è descritta dall'Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \alpha \vec{L}^2 + \beta \vec{S}^2 + \gamma (L_z + 2S_z) \tag{1}$$

1. Trovare gli autostati degli operatori, relativi al momento angolare totale, $\vec{J}^2$ e J_z, con $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$;

2. Se lo stato del sistema all'istante $t = 0$ è dato da

$$|\psi\rangle = |j = 2, j_z = 1\rangle\,, \tag{2}$$

   determinare quali valori di $\vec{J}^2$ e J_z possono risultare da una misura all'istante t generico e con quale probabilità;

3. Se all'istante t generico si misura l_z e si ottiene $l_z = 1$, quali valori può dare, e con quali probabilità, una successiva misura di s_z all'istante $t' > t$?

   ($\vec{L} = \hbar\vec{l}$ e $\vec{S} = \hbar\vec{s}$).

2 Esercizio n. 2

Siano date due particelle identiche con Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m} + \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m} - \frac{g^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \,. \tag{3}$$

1. Determinare gli autovalori dell'Hamiltoniana nel caso in cui le due particelle siano due bosoni di spin 0;

2. Determinare gli autovalori dell'Hamiltoniana nel caso in cui le due particelle siano due fermioni di spin 1/2;

3. Scrivere le possibili funzioni d'onda per il livello di energia più basso ed il primo stato eccitato, nel caso che le particelle siano due fermioni di spin 1/2, e discutere le relative degenerazioni.

4. Data la perturbazione

$$V = \mathcal{K}\,|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|\,\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \,, \tag{4}$$

calcolare lo spostamento in energia dello stato fondamentale. Si ricorda che la funzione d'onda radiale nello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno, in unità adimensionali, é data da

$$R_{10}(\xi) = 2e^{-\xi} \,. \tag{5}$$

Istituzioni di Fisica Teorica
prof. L. MAIANI

III Compito di esonero

Due particelle distinguibili, di spin $\frac{1}{2}$, sono in uno stato con funzione d'onda orbitale fissata. Fissando la nostra attenzione sulle sole variabili di spin, il sistema può trovarsi in quattro stati distinti: $\chi_1^+ \chi_2^+$; $\chi_1^+ \chi_2^-$; $\chi_1^- \chi_2^+$; $\chi_1^- \chi_2^-$.

L'interazione tra gli spin è:

$$H = \frac{A}{4}\ \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 = \frac{A}{4}\left(\sigma_{1x}\sigma_{2x} + \sigma_{1y}\sigma_{2y} + \sigma_{1z}\sigma_{2z}\right)$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Determinare le combinazioni lineari dei quattro stati che corrispondono agli autovettori di H, e i corrispondenti autovalori.

2. Se il sistema è in equilibrio termico con una sorgente a temperatura T, determinare il valore di T per cui la probabilità di trovare il sistema nello stato di energia minima è: $P_0 = 1/2$ ...

$u' = c \quad u = ct+b$

$u'' = 0$

$u = ct$

II° COMPITO DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

Proff. M. Lusignoli e A. Pugliese

1) Una particella di massa m si muove di moto unidimensionale ed è soggetta all'azione del potenziale:

$U(x) = +U_0 \qquad (0 \le x < b)$

$U(x) = 0 \qquad (b < x < a)$

$U(x) = +\infty \qquad (a < x)$

$U(-x) = U(x)$

Per quali valori di b e di U_0 (>0) l'autovalore minimo dell'operatore hamiltoniano, E_0, è uguale ad U_0?

In particolare, quale è il minimo valore di U_0 per cui questo si può verificare?

Scrivere l'autofunzione corrispondente normalizzata.

$u = 0$

2) Una particella di massa m si muove in una dimensione.

L'energia potenziale è:

$U(x) = +\infty \qquad (x < 0)$

$U(x) = +1/2\ m\omega^2 x^2 \qquad (x > 0)$

All'istante t=0 la funzione d'onda è:

$E_1 \sim U_0$

$$\psi(x,0) = \frac{4}{\sqrt{15}} \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x\right)^3 e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2}$$

a) Determinare i possibili risultati di una misura dell'energia e le relative probabilità.

b) Si supponga che all'istante $t = \frac{4\pi}{\omega}$ il potenziale venga modificato "istantaneamente" e diventi:

$U(x) = 1/2\ m\omega^2 x^2 \qquad (\forall x)$

Se si effettua una misura di energia ad un tempo t successivo, con quali probabilità si possono ottenere i risultati precedentemente determinati (v. domanda (a))?

c) Facoltativo:

Calcolare $\langle x^2 \rangle$ in funzione del tempo per $0 < t < \frac{4\pi}{\omega}$

Polinomi di Hermite:

$H_0(x) = 1$

$H_1(x) = 2x = 2\sqrt{2}\,\xi = 2\sqrt{2}\,\alpha x$

$H_2(x) = 4x^2-2$

$H_3(x) = 8x^3-12x$

E_1 ed E_3

mc

Date le seguenti funzioni d'onda complessive che descrivono lo stato della particella

$$Z_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}\, Y_{10}(\theta,\varphi)\chi_+ + \frac{1}{\sqrt{3}} Y_{11}(\theta,\varphi)\chi_-$$

$$Z_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} Y_{10}(\theta,\varphi)\chi_+ + \sqrt{\frac{2}{3}}\, Y_{11}(\theta,\varphi)\chi_-$$

1) Dimostrare che Z_1 e Z_2 sono ortogonali

2) Dimostrare che Z_1 e Z_2 sono autofunzioni dell'operatore

$$J^2 = L^2 + S^2 + 2\vec{L}\cdot\vec{S}$$

e determinare i rispettivi autovalori

3) Determinare il valor medio di L_z e la probabilità P_1 di trovare il valore $m = 1$ per L_z negli stati descritti da Z_1 e Z_2

4) Data la funzione d'onda

$$U(\theta,\varphi) = Y_{10}(\theta,\varphi)\chi_+$$

determinare qual'è la probabilità di trovare per J^2 il valore $\frac{15}{4}$

FACOLTATIVA

5) Scrivere la funzione d'onda complessiva dello stato della particella tale che una misura di L_x dia con certezza $\hbar$ e una misura di S_x dia con certezza $\hbar/2$. In tale stato quanto vale J_x ?

mc

3. - Una particella di massa M è sottoposta all'azione di un potenziale armonico di costante di richiamo K. Il problema è unidimensionale. All'istante iniziale (t = 0) il sistema è descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x,0) = A x^3 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

con A costante di normalizzazione

Calcolare, al tempo t = 0

1) $\langle\psi\, \pi\, \psi\rangle$, valor medio della parità

2) $\langle\psi\, p\, \psi\rangle$, valor medio dell'impulso

3) $\langle\psi\, H\, \psi\rangle$, valor medio dell'energia

4) Calcolare quale è la funzione d'onda all'istante generico t

5) Calcolare a quell'istante i valori medi delle grandezze π, p

$\langle\psi\, \pi\, \psi\rangle_t$, $\langle\psi\, p\, \psi\rangle_t$, $\langle\psi\, H\, \psi\rangle_t$

NOTA - Le domande relative a $\langle\psi\, \pi\, \psi\rangle$ in 1) e 5) possono essere sostituite dalla seguente:

1' Ha la funzione ψ una parità definita al tempo t = 0, e qual? Ed al tempo t generico?