Compito in Classe di
Introduzione alla Meccanica Quantistica,
Meccanica Quantistica
e Istituzioni di Fisica Teorica 10/12/2004
A.A. 2004–2005
Proff. M. Falcioni, G. Martinelli, A. Pugliese

1 Esercizio 1- Recupero I Esonero Introduzione Mec. Quantistica

Sia consideri un sistema a due stati, $|1\rangle$ e $|2\rangle$, la cui Hamiltoniana è data da

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & V_{12} \\ V_{21} & E_2 \end{pmatrix} , \tag{1}$$

con $V_{21} = V_{12}^*$.

1. Determinare gli autovalori e gli autostati dell'Hamiltoniana;

2. Determinare gli autovalori e gli autostati nel caso particolare $|V_{12}|^2 = E_1 E_2$, con $E_1 > 0$ e $E_2 > 0$;

3. Se lo stato al tempo $t = 0$ è dato da $|\psi\rangle = |1\rangle$, determinare lo stato al tempo t generico e la probabilità di ciascuno dei due autovalori dell'Hamiltoniana;

4. Dato l'operatore

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \tag{2}$$

determinare gli autovalori di $sigma_x$; determinare inoltre al tempo t il valor medio di $sigma_x$ e la probabilità di ciascun autovalore.

2 Esercizio 2- Recupero II Esonero Introduzione Mec. Quantistica, Esercizio 1 Istituzioni Fisica Teorica

Si consideri un sistema la cui Hamiltoniana è data da

$$H = \frac{p^2}{2m} + U(x)\,, \tag{3}$$

con

$$\begin{aligned} U(x) &= +\infty \qquad x < 0 \\ &= \frac{m\omega^2 x^2}{2} \qquad x \geq 0\,. \end{aligned}$$

1. Determinare autovalori e autostati dell'Hamiltoniana;

2. Se lo stato del sistema è descritto dalla funzione d'onda

$$\begin{aligned} \psi(x) &= 0 \qquad x < 0 \\ &= N x^3 e^{-\alpha x} \qquad x \geq 0\,, \end{aligned}$$

   determinare la probabilità che una misura di energia dia l'autovalore corrispondente allo stato fondamentale;

3. Determinare il valor medio di p^2 in questo stato.

3 Esercizio 3- Recupero Esame Mec. Quantistica, Esercizio 2 Istituzioni Fisica Teorica

L'Hamiltoniana di due particelle identiche di spin 1/2, vincolate a muoversi nel piano $x - y$ è data da

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 \,, \tag{4}$$

dove $\vec{p}_{1,2} \equiv (p^x_{1,2}, p^y_{1,2})$ e $\vec{r}_{1,2} \equiv (r^x_{1,2}, r^y_{1,2})$.

1. Determinare gli autovalori e gli autostati di H nel sistema del centro di massa e discuterne la degenerazione;

2. Se si effettua una misura dello spin e del momento angolare orbitale lungo l'asse z per lo stato fondamentale e per il primo stato eccitato, quali sono i valori possibili della misura ?

3. Se si aggiunge all'Hamiltoniana il termine

$$V(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2) = \lambda L_z S_z \,, \tag{5}$$

dove S_z è lo spin totale del sistema, come vengono modificati gli autovalori dell'Hamiltoniana per i primi due livelli di energia, al prim'ordine in teoria delle perturbazioni?

4 Esercizio 4 Istituzioni Fisica Teorica

Un sistema in equilibrio termico alla temperatura T è composto da N microsistemi distinguibili e non interagenti tra loro. Ogni microsistema ha a disposizione 2 stati di energia E_0 e 4 stati di energia $E_1 (> E_0)$.

1. Scrivere la somma di partizione canonica per il sistema.
2. Calcolare l' energia media U del sistema.
3. Studiare l' andamento di U nei limiti di alta e bassa temperatura.
4. Calcolare l' entropia del sistema.

Prova scritta di Meccanica Quantistica, esercizio 2 di Istituzioni di Fisica Teorica

La Hamiltoniana di due particelle identiche di massa m e di spin 1/2 é

$$H = -\frac{g^2}{|\vec{r_1} - \vec{r_2}|}.$$

Determinare nel sistema del baricentro gli autovalori dell'hamiltoniana e i relativi autoket.

Determinare la degenerazione dei primi tre livelli dell'hamiltoniana.

Specificare per gli stati appartementi ai primi tre livelli dell'hamiltoniana i possibili valori di L^2, S^2 e J^2, dove $\vec{S}$ é lo spin totale delle due particelle $\vec{L}$ é il loro monento angolare orbitale nel sistema del centro di massa e $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$.

Facoltativo: Come cambiano gli autovalori e la degenerazione dei primi due livelli dell'hamiltoniana se all'hamiltoniana si aggiunge il termine $V = \alpha \vec{S_1}.\vec{S_2}$.

Esonero 6 Dicembre 2005

L'Hamiltoniana di una particella di massa m è data dall'espressione

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}\,. \tag{6}$$

- Determinare, a meno di una fase relativa arbitraria, lo stato più generale $|\psi\rangle$ ($\langle\psi|\psi\rangle = 1$) che soddisfa le seguenti condizioni:

  1. una misura dell'energia dà certamente un risultato minore di $3\hbar\omega$;
  2. il valor medio $\langle\psi|x|\psi\rangle$ è nullo per OGNI valore del tempo;
  3. $\langle H\rangle = 7/6\hbar\omega$;

- Determinare il valor medio dell'impulso in funzione del tempo;

- Facoltativo: fissare la fase arbitraria imponendo che, all'istante $t = 0$, il valore di $\langle\psi|x^2|\psi\rangle$ sia il più piccolo possibile.

- Facoltativo: determinare il valor medio di x^2 e p^2 in funzione del tempo.

Prova scritta di Istituzioni di Fisica Teorica
22 giugno 2004

Esercizio n. 1) Una particella di massa m, vincolata sul segmento $0 \leq x \leq L$, a un certo istante ($t = 0$) si trova in uno stato la cui funzione d' onda è $\Psi(x) = A\,x(B - (x/2))$. a) Determinare le costanti A e B in modo che la $\Psi(x)$ sia adatta a descrivere una particella su un segmento e sia normalizzata a 1. b) Calcolare $\langle P \rangle$ per $t = 0$ e $\langle H \rangle$ per $t > 0$. c) Calcolare la probabilità di ottenere $E = 4(\pi\hbar/L)^2/2m$ e la probabilità di ottenere $E = 9(\pi\hbar/L)^2/2m$ misurando l' energia della particella per $t > 0$. d) Calcolare $\langle X \rangle$ e mostrare che non dipende dal tempo (N.B.:si può rispondere alla domanda senza eseguire calcoli).

Esercizio n. 2) Una particella di massa m si muove in tre dimensioni, la sua hamiltoniana ha la forma:

$$H = H_0 + \lambda V,$$

dove

$$H_o = \frac{1}{2m}|\vec{p}|^2 + \frac{1}{2}m\omega^2|\vec{r}|^2 \qquad \text{e} \qquad V = m\omega^2 xy$$

(x, y, z sono le componenti di $\vec{r}$). a) Considerando solo i primi due livelli di H_0 determinare fino al I ordine perturbativo gli autovalori e i corrispondenti autoket di H.

b) Discutere la degenerazione dei livelli di cui al punto a) con e senza perturbazione.

c) Osservando che vale la seguente uguaglianza

$$|\vec{r}|^2 + \lambda xy = \frac{1}{2}(1+\lambda)(x+y)^2 + \frac{1}{2}(1-\lambda)(x-y)^2 + z^2,$$

trovare la soluzione esatta del problema facendo una opportuna trasformazione delle coordinate.

Gli studenti di Introduzione alla Meccanica Quantistica devono fare l'esercizio 1 (1.5 ore). Gli studenti di Meccanica Quantistica l' esercizio 2 (1.5 ore).

Prova scritta di Istituzioni di Fisica Teorica

22 giugno 2004

Esercizio n. 1) Un gas perfetto di N particelle identiche di massa m è contenuto in un cilindro di altezza L e raggio di base R. Assumendo che l' asse del cilindro sia verticale e coincidente con l 'asse delle z e che la base del cilindro sia nel piano $x - y$, la hamiltoniana di singola particella si scrive:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + m\,g\,z - \alpha\,r^2 \qquad (0 \le z \le L\ ; \quad 0 \le r \le R)$$

dove g è l' accelerazione di gravità, α una costante positiva, e $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ la distanza dall' asse del cilindro. Il gas è in equilibrio a temperatura T e può essere descritto con la statistica classica.

a) Calcolare la funzione di partizione canonica del sistema.

b) Determinare l' energia media del gas e la sua energia potenziale media.

c) Calcolare i limiti per alta e bassa temperatura dell'energia potenziale media del gas.

d) Scrivere la densità delle particelle in funzione della posizione e determinare il numero di particelle che si trovano a una quota tra z e $z + dz$.

Esercizio n. 2) La Hamiltoniana di due particelle identiche di spin 1/2 è

$$H = H_0 + \lambda V,$$

dove

$$H_0 = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{4}|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2$$

e

$$V = \sqrt{\frac{\omega^3 m}{2\hbar}}|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}\ ,$$

dove $\mathbf{S}$ è lo spin totale delle due particelle e $\mathbf{L}$ è il loro monento angolare orbitale nel sistema del centro di massa.

a) Determinare le costanti del moto comuni a H_0 e V.

b) Determinare, nel sistema del centro di massa, l'energia, gli autoket e la degenerazione del primo livello eccitato di H_0.

c) Calcolare fino al I ordine in λ gli autovalori di H e la loro degenerazione per gli stati di cui al punto b).

Compito scritto di Introduzione alla Meccanica Quantistica Meccanica Quantistica e Istituzioni di Fisica Teorica 29/3/2004 A.A. 2003–2004 Proff. M. Falcioni, G. Martinelli, A. Pugliese

- SCRIVERE IN MANIERA CHIARA: NOME E COGNOME, NOME DEL DOCENTE E SE IL COMPITO SI RIFERISCE A ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA (QUADRIENNALE), INTRODUZIONE ALLA MECCANICA QUANTISTICA (TRIENNALE) O MECCANICA QUANTISTICA (TRIENNALE)
- Gli studenti di Istituzioni di Fisica Teorica devono fare gli esercizi 1,2,3 (4 ore);
- Gli studenti che recuperano Introduzione alla Meccanica Quantistica l'esercizio 2 (2 ore);
- Gli studenti di Meccanica Quantistica gli esercizi 3 e 4 (3 ore).

Esercizio n. 1

Un gas perfetto di N bosoni identici di massa nulla e spin 0 è contenuto in un ipercubo di lato L in D dimensioni. La hamiltoniana di singola particella è:

$$H = c\,|\mathbf{p}| \qquad \text{con} \qquad |\mathbf{p}| = \left(p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_D^2\right)^{1/2},$$

e c è la velocità della luce.

a) Mostrare che per $D \geq 2$ si ha la condensazione di Bose;

b) per $D \geq 2$ determinare la temperatura di condensazione, T_c;

c) calcolare il numero di bosoni nello stato fondamentale, per $D \geq 2$ e $T < T_c$.

Si ricorda il volume di una ipersfera di raggio R in D dimensioni

$$V_D(R) = \frac{\pi^{D/2} R^D}{\Gamma(\frac{D}{2}+1)}$$

Esercizio n. 2

Si consideri un oscillatore armonico unidimensionale descritto dall'Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}\,, \tag{7}$$

il cui stato, all'istante $t = 0$ è descritto dalla funzione d'onda:

$$\psi(\xi) = \frac{\mathcal{N}}{\pi^{1/4}}\,\xi\,\left(\xi - \frac{1}{2}\right) e^{-\xi^2/2}\,, \tag{8}$$

dove $\xi = \sqrt{m\omega/\hbar}\;x$ e $\mathcal{N}$ è un opportuno fattore di normalizzazione.

1. Calcolare il fattore di normalizzazione $\mathcal{N}$;
2. Se si effettua una misura dell'energia del sistema, quali valori sono i possibili risultati della misura e con quale probablità; per il calcolo degli integrali si riportanto le seguenti formule utili:

$$\begin{aligned}
I_n &= \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\; x^{2n} e^{-\alpha x^2} = \frac{2^n}{\alpha^n}\frac{\Gamma\left[(2n+1)/2\right]}{\sqrt{\pi}}\,,\\
\Gamma(n+1) &= n\,\Gamma(n) \qquad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}\,,\\
\psi_n(\xi) &= \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{2^n\;n!}}H_n(\xi)e^{-\xi^2/2}\,,\\
H_0 &= 1 \quad H_1 = 2\xi \quad H_2 = -2 + 4\xi^2\\
H_3 &= -12\xi + 8\xi^3 \quad H_4 = 12 - 48\xi^2 + 16\xi^4\,.
\end{aligned} \tag{9}$$

3. Calcolare l'energia media e l'energia potenziale media dello stato descritto da $\psi(\xi)$;
4. Scrivere la funzione d'onda all'istante t generico

Esercizio n. 3

Una particella di spin 1 e massa m è vincolata a muoversi sulla superfice di una sfera di raggio R. L'Hamiltoniana del sistema è

$$\mathcal{H} = \frac{\mathbf{L}^2}{2mR^2} + \alpha\frac{\mathbf{L.S}}{2mR^2}\,, \tag{10}$$

e lo stato iniziale del sistema è rappresentato dallo spinore

$$\Psi(\theta,\varphi;t=0)=\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(\sin\theta e^{-i\varphi}|1,0> \quad . \tag{11}$$

1. Determinare lo spinore a un tempo t generico;

2. Determinare in funzione del tempo i possibili risultati di una misura di L_z , L_x e di S_z e le relative probabilità.

Esercizio 4

Due particelle identiche di spin 1/2 sono vincolate a muoversi lungo l'asse x nel segmento$-L/2 < x < L/2$. La loro Hamiltoniana è:

$$\mathcal{H}=\mathcal{H}_0+\lambda V \tag{12}$$

dove $\mathcal{H}_0$ è l'Hamiltoniana delle due particelle sul segmento e

$$V=\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\sin(\frac{\pi x_1}{2L})S_{1z}\sin(\frac{\pi x_2}{2L})S_{2z} \tag{13}$$

Determinare:

1. per lo stato fondamentale di $\mathcal{H}_0$ l'energia fino al II ordine in λ e il ket fino al I ordine in λ;

2. per gli stati che appartengono al I livello eccitato di $\mathcal{H}_0$ l'energia fino al I ordine in λ.

3. Discutere la degenerazione dei primi due livelli di $\mathcal{H}_0$ con e senza perturbazione.

NOTA BENE:

$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y),$$
$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y),$$

Compito scritto di Meccanica Quantistica, Istituzioni di Fisica Teorica 29/3/2004 A.A. 2002–2003 Proff. M. Falcioni, G. Martinelli, A. Pugliese

Esercizio n. 1

Un gas perfetto di N bosoni identici di massa nulla e spin 0 è contenuto in un ipercubo di lato L in D dimensioni. La hamiltoniana di singola particella è:

$$H = c\,|\mathbf{p}| \qquad \text{con} \qquad |\mathbf{p}| = \left(p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_D^2\right)^{1/2},$$

e c è la velocità della luce.

a) Mostrare che per $D \geq 2$ si ha la condensazione di Bose;

b) per $D \geq 2$ determinare la temperatura di condensazione, T_c;

c) calcolare il numero di bosoni nello stato fondamentale, per $D \geq 2$ e $T < T_c$.

Si ricorda il volume di una ipersfera di raggio R in D dimensioni

$$V_D(R) = \frac{\pi^{D/2} R^D}{\Gamma(\frac{D}{2}+1)}$$

Esercizio n. 2

Esercizio n. 3

Una particella di spin 1 e massa m è vincolata a muoversi sulla superfice di una sfera di raggio R Hamiltoniana è:

$$H = \frac{\mathbf{L}^2}{2mR^2} + \alpha\frac{\mathbf{L.S}}{2mR^2}.$$

Lo stato iniziale del sistema è rappresentato dallo spinore

$$\Psi(\theta,\varphi;t=0)=\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(\sin\theta e^{-i\varphi}|1,0>$$

Determinare lo spinore a un tempo t generico.

Determinare in funzione del tempo i possibili risultati di una misura di L_z , L_x e di S_z e le relative probabilità.

esercizio 4

Due particelle identiche di spin 1/2 sono vincolate a muoversi lungo l'asse x nel segmento$-L/2 < x < L/2$. La loro Hamiltoniana è:

$$H=H_0+\lambda V$$

dove H_0 è l'Hamiltoniana delle due particelle sul segmento e

$$V=\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\sin(\frac{\pi x_1}{2L})S_{1z}\sin(\frac{\pi x_2}{2L})S_{2z}$$

Determinare:

a) per lo stato fondamentale di H_0 l'energia fino al II ordine in λ e il ket fino al I ordine in λ;

b) per gli stati che appartengono al I livello eccitato di H_0 l'energia fino al I ordine in λ.

Discutere la degenerazione dei primi due livelli di H_0 con e senza perturbazione.

NOTA BENE:

$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y),$$
$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y),$$

Gli studenti di Istituzioni di Fisica Teorica devono fare gli esercizi 1,2,3. (4 ore)

Gli studenti che recuperano Introduzione alla Meccanica Quantistica l'esercizio 2. (1.5 ore)

Gli studenti di Meccanica Quantistica gli esercizi 3 e 4. (3 ore)

II Compito di Esonero di Meccanica Quantistica
16/3/2004 A.A. 2003-2004
Proff. Guido Martinelli e Alessandra Pugliese

5 Esercizio n. 1

Si consideri un sistema unidimensionale la cui Hamiltoniana è data da

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} + \alpha(x - x_0)\,, \tag{14}$$

1. Determinare esattamente gli autovalori e le autofuzioni dell'Hamiltoniana;
2. Considerando il termine $V = \alpha(x - x_0)$ come una perturbazione,

   calcolare, al primo ordine perturbativo, la funzione d'onda per lo stato fondamentale e al secondo ordine perturbativo il valore dell'energia corrispondente ai due stati imperturbati di energia più bassa;
3. Per i due stati imperturbati di energia più bassa, confrontare il risultato esatto con quello ottenuto al primo ordine perturbativo.

6 Esercizio n. 2

Sia consideri, nel sistema di riferimento del centro di massa, un sistema tridimensionale costituito da due particelle identiche di spin 0 la cui Hamiltoniana è data da

$$\mathcal{H}_0 = \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m} + \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m} - \frac{e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}\,. \tag{15}$$

.

Trascurando il moto del centro di massa:

1. Trovare gli autovalori e gli autostati dell'Hamiltoniana e discuterne la degenerazione;
2. Se all'istante $t = 0$, il sistema si trova nello stato

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|\psi_1\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|\psi_2\rangle \tag{16}$$

dove $|\psi_{1,2}\rangle$ sono i due stati di energia minore, calcolare il valor medio dell'energia e determinare lo stato per un generico istante $t > 0$;

3. Se si aggiunge a $\mathcal{H}_0$ il potenziale

   $V = \alpha|\vec{r}_1 - \vec{r}_2^2|$, calcolare al primo ordine in teoria delle perturbazioni, lo spostamento in energia per gli stati $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$.

Formule Utili

Le autofunzioni di un sistema idrogenoide hanno la forma $R_{nl}(r)Y_{l,l_z}(\theta,\phi)$ dove $Y_{l,l_z}(\theta,\phi)$ sono le armoniche sferiche e

$$I_n = \int_0^\infty z^n\, e^{-z} = n!$$

$\mathrm{R}_{1,0}(r) = 2\left(\frac{1}{r_0}\right)^{3/2} e^{-r/r_0}$

$\mathrm{R}_{2,0}(r) = 2\left(\frac{1}{2r_0}\right)^{3/2}\left[1-\left(\frac{r}{2r_0}\right)\right] e^{-r/2r_0}(17)$

$\mathrm{R}_{2,1}(r) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2r_0}\right)^{3/2}\left(\frac{r}{r_0}\right) e^{-r/2r_0}\,.$

Compito scritto di Istituzioni di Fisica Teorica
11/9/2003 A.A. 2002–2003
Proff. M. Falcioni, G. Martinelli, A. Pugliese

Esercizio n.

Una particella di spin 1 e massa m è vincolata a muoversi sulla superfice di una sfera di raggio R ed è immersa in un campo magnetico B diretto lungo l'asse z, la sua Hamiltoniana è:

$$H = \frac{\mathbf{L}^2}{2mR^2} + \frac{\mu_B}{\hbar} B(L_z + 2S_z).$$

All'istante iniziale una misura diJ^2 dà con certezza $2\hbar^2$, una di diJ_z dà con certezza $+\hbar$ e una di diL^2 dà un risultato minore o uguale a $2\hbar^2$; la probabilità di trovare $S_z = +\hbar$ è$2/3$ e quella di $S_z = -\hbar$ e/‘ 0; infine il valor medio di$\cos\theta$ èil massimo possibile.

Determinare lo stato del sistema a un tempo t generico.

Determinare in funzione del tempo il valor medio di $\cos\theta$ e di J^2 .

Un gas perfetto di N fermioni identici di spin 1/2, con massa nulla, è contenuto in un cilindro di altezza infinita, la cui base, di area A, si trova nel piano $z = 0$. Le particelle sono soggette a una forza costante perpendicolare al piano $z = 0$ e l' hamiltoniana di singola particella è:

$$H = c\,|\mathbf{p}| + \alpha z \qquad (z \geq 0)\,,$$

dove c è la velocità della luce e $\alpha > 0$ una costante.
Si determini:

a) la temperatura di Fermi, T_F, del gas;

b) il valore massimo che può assumere la coordinata z di una particella del gas a $T = 0$.

Sapendo che il gas si trova in equilibrio a una temperatura $T \gg T_F$, e quindi può essere applicata la statistica classica,

c) scrivere la funzione di partizione canonica per il sistema;

d) determinare l' entropia del gas in funzione della temperatura;

e) calcolare la quota al di sotto della quale si trovano, in media, $N/2$ particelle.

Formula utile:

$$\int_0^\infty u^n e^{-u} du = n! \qquad \text{(per } n \text{ intero)}$$

III Compito di Esonero di Istituzioni di Fisica Teorica 2/2/2001
A.A. 2000–2001
Prof. Guido Martinelli

7 Esercizio n. 1

Sia data una particella di spin 1 e momento angolare orbitale 1, la cui evoluzione temporale è descritta dall'Hamiltoniana

$$\mathcal{H} \;=\; \alpha\,\vec{L}^2 + \beta\,\vec{S}^2 + \gamma\,(L_z + 2S_z) \tag{18}$$

1. Trovare gli autostati degli operatori, relativi al momento angolare totale, $\vec{J}^2$ e J_z, con $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$;

2. Se lo stato del sistema all'istante $t = 0$ è dato da

   $$|\psi\rangle = |j = 2, j_z = 1\rangle\,, \tag{19}$$

   determinare quali valori di $\vec{J}^2$ e J_z possono risultare da una misura all'istante t generico e con quale probabilità;

3. Se all'istante t generico si misura l_z e si ottiene $l_z = 1$, quali valori può dare, e con quali probabilità, una successiva misura di s_z all'istante $t' > t$?

   ($\vec{L} = \hbar\vec{l}$ e $\vec{S} = \hbar\vec{s}$).

8 Esercizio n. 2

Siano date due particelle identiche con Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m} + \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m} - \frac{g^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \,. \tag{20}$$

1. Determinare gli autovalori dell'Hamiltoniana nel caso in cui le due particelle siano due bosoni di spin 0;

2. Determinare gli autovalori dell'Hamiltoniana nel caso in cui le due particelle siano due fermioni di spin 1/2;

3. Scrivere le possibili funzioni d'onda per il livello di energia più basso ed il primo stato eccitato, nel caso che le particelle siano due fermioni di spin 1/2, e discutere le relative degenerazioni.

4. Data la perturbazione

$$V = \mathcal{K}\,|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|\,\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \,, \tag{21}$$

calcolare lo spostamento in energia dello stato fondamentale. Si ricorda che la funzione d'onda radiale nello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno, in unità adimensionali, é data da

$$R_{10}(\xi) = 2e^{-\xi} \;. \tag{22}$$