# Esercizio 1

Sia dato il seguente stato di un sistema

$$\psi(\vec{x}, t=0) = Ne^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2}}(x+y+z)\ .$$

**1)** Quali valori puó dare una misura di $\vec{L}^2$ e $L_z$ e con che probabilità?

**2)** Sia $H = -\lambda L_z$ determinare $\langle L_z \rangle_t$ e $\langle L_x \rangle_t$ .

## Soluzione

**1)** Passiamo in coordinate sferiche:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\psi(\vec{x}) &= N\exp(-\frac{r^2}{a^2})\left(r\sin\theta\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} + r\sin\theta\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i} + r\cos\theta\right) \\
&= Nr\exp(-\frac{r^2}{a^2})\left[i\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\frac{1-i}{2}Y_{1,1} - i\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\frac{1+i}{2}Y_{1,-1} - i\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_{1,0}\right] \\
&= N\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\frac{r}{2}\exp(-\frac{r^2}{a^2})\left[(1+i)Y_{1,1} + (1-i)Y_{1,-1} - i\sqrt{2}Y_{1,0}\right]\ .
\end{aligned}$$

Perciò i valori di una misura di $\vec{L}^2$ e $L_z$ saranno

$$\langle\vec{L}^2\rangle = \hbar^2 l(l+1) = 2\hbar^2 \qquad \text{e} \qquad \langle L_z\rangle = \hbar\begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}\ .$$

Ovviamente

$$P(l=1) = 1$$

mentre

$$\begin{aligned}
P(l_z = 1) &= \frac{|\langle\psi(\vec{x}), l_z = 1|\psi(\vec{x})\rangle|^2}{|\langle\psi(\vec{x})|\psi(\vec{x})\rangle|} \\
&= \frac{|(1+i)|^2}{|(1-i)(1+i) + (1+i)(1-i) - 2i^2|} = \frac{1}{3} \\
P(l_z = -1) &= \frac{1}{3} \\
P(l_z = 0) &= \frac{1}{3}\ .
\end{aligned}$$

**2)** Siccome $[H, L_z] = 0$, $L_z$ è una costante del moto quindi

$$\begin{aligned}\langle L_z\rangle_t &= \frac{\langle\psi|L_z|\psi\rangle_t}{\langle\psi|\psi\rangle_t} = \frac{\langle\psi|L_z|\psi\rangle_{t=0}}{\langle\psi|\psi\rangle_{t=0}} \\ &= \frac{\hbar|(1+i)|^2 - \hbar|(1-i)|^2}{|(1-i)(1+i) + (1+i)(1-i) - 2i^2|} = 0 \ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle L_x\rangle_t &= \frac{\langle\psi|L_x|\psi\rangle_t}{\langle\psi|\psi\rangle_t} = \frac{\langle\psi|e^{\frac{i}{\hbar}H^\dagger t}L_x e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi\rangle_{t=0}}{\langle\psi|e^{\frac{i}{\hbar}H^\dagger t}e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi\rangle_{t=0}} \\ &= \frac{\langle\psi|e^{-\frac{i}{\hbar}\lambda L_z^\dagger t}(\frac{L_+ + L_-}{2})e^{\frac{i}{\hbar}\lambda L_z t}|\psi\rangle_{t=0}}{\langle\psi|\psi\rangle_{t=0}} \\ &= \frac{1}{6}\left[\left((1-i)e^{-i\lambda t}\langle 1,1| + (1+i)e^{i\lambda t}\langle 1,-1| + i\sqrt{2}\langle 1,0|\right)(\frac{L_+ + L_-}{2})\right. \\ &\quad \left.\left((1+i)e^{i\lambda t}|1,1\rangle + (1-i)e^{-i\lambda t}|1,-1\rangle - i\sqrt{2}|1,0\rangle\right)\right] \\ &= \frac{1}{12}\left[(1-i)e^{-i\lambda t}\sqrt{2}(-i\sqrt{2}) + (1+i)e^{i\lambda t}\sqrt{2}(-i\sqrt{2})\right. \\ &\quad \left. + i\sqrt{2}(1+i)e^{i\lambda t}\sqrt{2} + i\sqrt{2}(1-i)e^{-i\lambda t}\sqrt{2}\right] = 0 \ .\end{aligned}$$

## Esercizio 2

Sia dato il seguente stato di un sistema

$$\psi(\vec{x}, t=0) = \psi(r, \theta, \varphi, t=0) = R(r)[\alpha_0 Y_{1,1}(\theta, \varphi) + \beta_0 Y_{1,-1}(\theta, \varphi)]$$

e l'Hamiltoniana

$$H = \frac{|\vec{L}|^2}{2I} + \alpha L_z \ .$$

**1)** Determinare $\psi(\vec{x}, t)$.

**2)** Quali valori può dare una misura di $|\vec{L}|^2$, $L_z$ e $L_x$ e con che probabilità?

**3)** Per quale $t$ la probabilità di avere $L_x = 1$ è massima?

**4)** Si definiscano gli stati $\psi_-$ e $\psi_+$ nel seguente modo

$$\psi(\vec{x})_- = \frac{R(r)}{\sqrt{2}}[Y_{1,1} - Y_{1,-1}]$$

$$\psi(\vec{x})_+ = \frac{R(r)}{\sqrt{2}}[Y_{1,1} + Y_{1,-1}]$$

e l'operatore $F$ dalle seguenti proprietà

$$F\psi_- = 0 \quad e \quad F\psi_+ = \psi_- \ .$$

Determinare il valore di aspettazione dell'operatore $F$ ad un generico tempo $t$, ovvero

$$F(t) = \langle\psi|F|\psi\rangle_t$$

e calcolare il seguente limite

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt \ .$$

## Soluzione

**1)** Imponiamo la normalizzazione della funzione d'onda,

$$\int_0^\infty r^2 |R(r)|^2 dr = 1$$

e

$$|\alpha_0|^2 + |\beta_0|^2 = 1 \ .$$

Lo stato al tempo $t$ è dato da

$$\psi(\vec{x}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\psi(\vec{x}, 0) = R(r)\{\alpha_0 e^{-i[\frac{\hbar}{I}+\alpha]t}Y_{1,1} + \beta_0 e^{-i[\frac{\hbar}{I}-\alpha]t}Y_{1,-1}\} \ .$$

**2)** Siccome $[L^2, H] = [L_z, H] = 0$, $L^2$ e $L_z$ sono costanti del moto, calcoliamo i possibili valori di una misura di $L^2$ e $L_z$ al tempo $t = 0$.

$$L^2[R(r)(\alpha_0|1,1\rangle + \beta_0|1,-1\rangle)] = \hbar^2[R(r)(2\alpha_0|1,1\rangle + 2\beta_0|1,-1\rangle)]$$
$$L_z[R(r)(\alpha_0|1,1\rangle + \beta_0|1,-1\rangle] = \hbar[R(r)(\alpha_0|1,1\rangle - \beta_0|1,-1\rangle)]$$

quindi

$$P(L^2 = 2\hbar^2) = 1$$

mentre

$$P(L_z = \hbar) = |\alpha_0|^2 \quad \text{e} \quad P(L_z = -\hbar) = |\beta_0|^2 \ .$$

Per vedere che valori può dare una misura di $L_x$ scriviamo gli autostati di $L^2$ ed $L_z$ nella base degli autostati di $L^2$ ed $L_x$, per fare questo dobbiamo diagonalizzare la matrice che rappresenta l'operatore $l_x$ nella base degli autostati di $l^2$ ed $l_z$.

$$|1,1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad |1,0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad |1,-1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ ,$$

$$\langle l^2, l_z|l_x|l^2, l_z\rangle = \langle l^2, l_z|\frac{l_+ + l_-}{2}|l^2, l_z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

gli autovalori sono $l_x = 1, 0, -1$, mentre gli autostati

$$|l_x = 1\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \ , \quad |l_x = -1\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \ , \quad |l_x = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \ ,$$

da cui otteniamo

$$|1,1\rangle_{l^2,l_z} = \frac{1}{2}(|1,1\rangle_{l^2,l_x} + |1,1\rangle_{l^2,l_x} + \sqrt{2}|1,1\rangle_{l^2,l_z})$$
$$|1,-1\rangle_{l^2,l_z} = \frac{1}{2}(|1,1\rangle_{l^2,l_x} + |1,1\rangle_{l^2,l_x} - \sqrt{2}|1,1\rangle_{l^2,l_z})$$
$$|1,0\rangle_{l^2,l_z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,1\rangle_{l^2,l_x} - |1,1\rangle_{l^2,l_x}) \ .$$

Lo stato espresso nella base degli autostati di $l^2$ e $l_x$ è dunque

$$|\psi(\vec{x})\rangle = \frac{R(r)}{2} e^{-i\frac{\hbar}{I}t} \left[ (\alpha_0 e^{-i\alpha t} + \beta_0 e^{+i\alpha t})|1,1\rangle_x \right.$$
$$\left. + (\alpha_0 e^{-i\alpha t} + \beta_0 e^{+i\alpha t})|1,-1\rangle_x + \sqrt{2}(\alpha_0 e^{-i\alpha t} - \beta_0 e^{+i\alpha t})|1,0\rangle_x \right] .$$

Per $L_x$ sono possibili i valori $-1, 0$ e $1$ con probabilità:

$$\begin{cases} P(L_x = -1) = \frac{1}{4}\left[|\alpha_0|^2 + |\beta_0|^2 + 2\alpha_0\beta_0\cos(2\alpha t)\right] \\ P(L_x = 0) = \frac{1}{2}\left[|\alpha_0|^2 + |\beta_0|^2 - 2\alpha_0\beta_0\cos(2\alpha t)\right] \\ P(L_x = 1) = \frac{1}{4}\left[|\alpha_0|^2 + |\beta_0|^2 + 2\alpha_0\beta_0\cos(2\alpha t)\right] \end{cases}$$

dove $|\alpha_0|^2 + |\beta_0|^2 = 1$.

**3)** Affinchè la probabilità di avere $L_x = 1$ sia massima dobbiamo imporre che il $\cos(2\alpha t)$ sia massimo, ovvero che $2\alpha t = 2k\pi$. Quindi la probabilità è massima ad ogni tempo che sia multiplo intero di $t = \frac{\pi}{\alpha}$.

**4)** Scriviamo le due funzioni $\psi_-$ e $\psi_+$

$$\begin{cases} \psi_- = \frac{R(r)}{\sqrt{2}}[|1,1\rangle - |1,-1\rangle] \\ \psi_+ = \frac{R(r)}{\sqrt{2}}[|1,1\rangle + |1,-1\rangle] . \end{cases}$$

quindi

$$\begin{cases} |1,-1\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2R(r)}(\psi_- - \psi_+) \\ |1,1\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2R(r)}(\psi_- + \psi_+) \end{cases}$$

ora possiamo scrivere la funzione d'onda in funzione di $\psi_-$ e $\psi_+$

$$|\psi(\vec{x},t)\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{ \left[\alpha_0 e^{-i\alpha t} + \beta_0 e^{i\alpha t}\right] |\psi\rangle_+ + [\alpha_0 e^{-i\alpha t} - \beta_0 e^{i\alpha t}]|\psi\rangle_- \right\} .$$

Calcoliamo il valore d'aspettazione dell'operatore $F$:

$$\begin{aligned} \langle\psi|F|\psi\rangle_t = {} & \frac{\sqrt{2}}{2}\left[{}_+\langle\psi|(\alpha_0^* e^{i\alpha t} + \beta_0^* e^{-i\alpha t}) + {}_-\langle\psi|(\alpha_0^* e^{i\alpha t} - \beta_0^* e^{-i\alpha t})\right] \\ & \frac{\sqrt{2}}{2}\left[(\alpha_0 e^{-i\alpha t} + \beta_0 e^{i\alpha t})|\psi\rangle_-\right] \\ = {} & \frac{1}{2}(\alpha_0^* e^{i\alpha t} - \beta_0^* e^{-i\alpha t})(\alpha_0 e^{-i\alpha t} + \beta_0 e^{i\alpha t}) \\ = {} & \frac{1}{2}(|\alpha_0|^2 - |\beta_0|^2 + 2i|\alpha_0||\beta_0|\sin(2\alpha t)) . \end{aligned}$$

Infine calcoliamo il limite

$$
\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T F(t)dt &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2}\left(|\alpha_0|^2 - |\beta_0|^2 - \frac{1}{T}2i|\alpha_0||\beta_0|\frac{\cos(2\alpha T)-1}{2\alpha}\right) \\
&= \frac{|\alpha_0|^2 - |\beta_0|^2}{2} \ .
\end{aligned}
$$

# Esercizio 3

Sia dato il seguente stato di un sistema

$$\psi(r,\theta,\varphi) = A\ x(r)\ (\cos\theta + \sin\theta\cos\varphi)$$

con

$$\int_0^\infty |x(r)|^2 r^2 dr = 1\ .$$

**1)** Calcolare $|A|$ in modo che $\psi$ sia ben normalizzata.

**2)** Dimostrare che $\langle L_+\rangle = \langle L_-\rangle$ .

**3)** Sia

$$H = \frac{L^2}{2I} + \alpha L_z$$

calcolare l'evoluzione temporale e i possibili valori che può dare una misura di $L_z$ con le rispettive probabilità.

## Soluzione

**1)**

$$\begin{aligned}\int |\psi(r,\theta,\varphi)|^2 r^2 dr d\Omega &= |A|^2 \int_0^\infty |x(r)|^2 r^2 dr \int_0^{2\pi}\int_0^\pi |(\cos\theta+\sin\theta\cos\varphi)|^2 \sin\theta d\theta d\varphi \\ &= |A|^2 \int_0^{2\pi}\int_0^\pi \left| -i\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_{1,0} - \frac{i}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}(Y_{1,-1}-Y_{1,1})\right|^2 \sin\theta d\theta d\varphi \\ &= |A|^2\frac{4\pi}{3}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2})\ .\end{aligned}$$

Quindi

$$|A| = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\ .$$

**2)**

$$\begin{aligned}\langle L_+\rangle &= \langle\psi|L_+|\psi\rangle = \left[\frac{i}{\sqrt{2}}\langle 1,0| + \frac{i}{2}\langle 1,-1| - \frac{i}{2}\langle 1,1|\right] L_+ \left[-\frac{i}{\sqrt{2}}|1,0\rangle - \frac{i}{2}|1,-1\rangle + \frac{i}{2}|1,1\rangle\right] \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0\ ,\end{aligned}$$

analogamente

$$\langle L_-\rangle = \langle\psi|L_-|\psi\rangle = 0\ .$$

**3)** L'evoluzione temporale è data da

$$\psi(\vec{x},t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\psi(\vec{x},0) = x(r)e^{-i\frac{\hbar}{I}t}\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}Y_{1,0} - \frac{i}{2}e^{-i\alpha t}Y_{1,1} + \frac{i}{2}e^{+i\alpha t}Y_{1,-1}\right)$$

$$= -\frac{i}{2}x(r)e^{-i\frac{\hbar}{I}t}\left(\sqrt{2}Y_{1,0} + e^{-i\alpha t}Y_{1,1} - e^{+i\alpha t}Y_{1,-1}\right)$$

perció i valori di una misura di $L_z$ sono

$$\langle L_z\rangle = \hbar\begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$$

con probabilità

$$P(l_z = 1) = \frac{1}{4} \qquad P(l_z = -1) = \frac{1}{4} \qquad P(l_z = 0) = \frac{1}{2}\ .$$

# Esercizio 4

Sia dato lo stato di un sistema $|\psi\rangle_{t=0}$ tale che una misura del momento angolare totale dà come risultato 1.

Inoltre

$$\frac{L_x + L_z}{\sqrt{2}} |\psi\rangle_{t=0} = |\psi\rangle_{t=0}$$

**1)** Determinare $|\psi\rangle_{t=0}$ .

**2)** Sia

$$H = \frac{L^2}{2I} + \alpha L_z$$

calcolare l'evoluzione temporale e $\langle L_z \rangle_t$, $\langle L_x \rangle_t$, $\langle L_y \rangle_t$.

## Soluzione

**1)** Abbiamo che $l = 1$ quindi

$$|\psi\rangle_{t=0} = a|1,1\rangle + b|1,0\rangle + c|1,-1\rangle$$

con $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = 1$ .

$$L_x = \frac{L_+ + L_-}{2}$$

quindi,

$$\begin{aligned}
\frac{L_x + L_z}{\sqrt{2}} |\psi\rangle_{t=0} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{L_+ + L_-}{2} + L_z \right) (a|1,1\rangle + b|1,0\rangle + c|1,-1\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{b}{\sqrt{2}}|1,1\rangle + \frac{c}{\sqrt{2}}|1,0\rangle + \frac{a}{\sqrt{2}}|1,0\rangle \right. \\
&\quad \left. + \frac{b}{\sqrt{2}}|1,-1\rangle + a|1,1\rangle - c|1,-1\rangle \right) \\
&= \frac{b + \sqrt{2}a}{2}|1,1\rangle + \frac{a+c}{2}|1,0\rangle + \frac{b - \sqrt{2}c}{2}|1,-1\rangle \\
&= a|1,1\rangle + b|1,0\rangle + c|1,-1\rangle \ ,
\end{aligned}$$

risolvendo otteniamo

$$a = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \ , \quad b = \frac{1}{2} \ , \quad c = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \ .$$

**2)**

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle_t &= e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi\rangle_{t=0} = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\left(a|1,1\rangle + b|1,0\rangle + c|1,-1\rangle\right) \\
&= e^{-i\frac{\hbar}{I}t}\left(e^{-i\alpha t}a|1,1\rangle + b|1,0\rangle + e^{i\alpha t}c|1,-1\rangle\right) \ .
\end{aligned}
$$

$[L_z, H] = 0$ perciò:

$$
\begin{aligned}
\langle L_z\rangle_t &= \langle L_z\rangle_{t=0} = \langle\psi|L_z|\psi\rangle_{t=0} = (a\langle 1,1| + b\langle 1,0| + c\langle 1,-1|)(a|1,1\rangle - c|1,-1\rangle) \\
&= a^2 - c^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \ .
\end{aligned}
$$

$$
\langle L_x\rangle_{t=0} = \langle\psi|\frac{L_+ + L_-}{2}|\psi\rangle_{t=0} = 2\sqrt{2}(ab + bc) \ ,
$$

$$
\langle L_y\rangle_{t=0} = \langle\psi|\frac{L_+ - L_-}{2i}|\psi\rangle_{t=0} = 0 \ .
$$

Calcoliamo l'evoluzione temporale di $L_x$ e $L_y$:

$$
\begin{aligned}
\frac{dL_x}{dt} &= \frac{i}{\hbar}[H, L_x] = \frac{i}{\hbar}\left(\frac{1}{2I}[L^2, L_x] + \alpha[L_z, L_x]\right) = -\alpha L_y \\
\frac{dL_y}{dt} &= \frac{i}{\hbar}[H, L_y] = \frac{i}{\hbar}\left(\frac{1}{2I}[L^2, L_y] + \alpha[L_z, L_y]\right) = \alpha L_x
\end{aligned}
$$

cioè

$$
\begin{aligned}
\frac{dL_+}{dt} &= i\alpha L_+ \ , \qquad & L_+(t) = L_+(0)e^{i\alpha t} = L_x(0)e^{i\alpha t} \\
\frac{dL_-}{dt} &= -i\alpha L_-, \qquad & L_-(t) = L_-(0)e^{-i\alpha t} = L_x(0)e^{-i\alpha t} \ ,
\end{aligned}
$$

pertanto

$$
\begin{aligned}
L_x(t) &= \frac{L_+(t) + L_-(t)}{2} = L_x(0)\cos(\alpha t) \\
L_y(t) &= \frac{L_+(t) - L_-(t)}{2i} = L_x(0)\sin(\alpha t)
\end{aligned}
$$

# Esercizio 5

Al tempo $t = 0$, lo stato di un sistema di due particelle è rappresentato, nella base $|l, l_z, l_1, l_2\rangle$ degli autostati di $l^2$, $l_z$, $l_1^2$, $l_2^2$, dal vettore

$$|\psi\rangle_{t=0} = \alpha|1,1,1,1\rangle + \beta|1,1,1,0\rangle$$

**1)** Quali sono i possibili valori di una misura di $l_{1z}$, $l_{2z}$, $l_1^2$, $l_2^2$ e con quale probabilità?

## Soluzione

**1)** Imponiamo innanzitutto la normalizzazione della funzione d'onda,

$$\langle\psi|\psi\rangle = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \ .$$

Scriviamo lo stato del sistema nella base $|l_1, l_{1z}\rangle, |l_2, l_{2z}\rangle$ degli autostati di $l_1^2$, $l_{1z}$, $l_2^2$, $l_{2z}$:

$$\begin{aligned}
|1,1,1,1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,1\rangle|1,0\rangle - |1,0\rangle|1,1\rangle) \\
|1,1,1,0\rangle &= |1,1\rangle|0,0\rangle
\end{aligned}$$

$$|\psi\rangle_{t=0} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(|1,1\rangle|1,0\rangle - |1,0\rangle|1,1\rangle) + \beta|1,1\rangle|0,0\rangle \ .$$

Avremo quindi che

$$\begin{aligned}
l_{1z} &= \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} P(l_{1z}=1) = |\alpha|^2/2 + |\beta|^2 \\ P(l_{1z}=0) = |\alpha|^2/2 \end{cases} \\
l_{2z} &= \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} P(l_{2z}=1) = |\alpha|^2/2 \\ P(l_{2z}=0) = |\alpha|^2/2 + |\beta|^2 \end{cases} \\
l_1 &= 1 \qquad\quad \text{con} \qquad P(l_1 = 1) = 1 \\
l_2 &= \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} P(l_2=1) = |\alpha|^2 \\ P(l_2=0) = |\beta|^2 \end{cases} \ .
\end{aligned}$$

# Esercizio 6

Al tempo $t = 0$, lo stato di un sistema di due particelle è rappresentato, nella base $|l_1, l_{1z}\rangle|l_2, l_{2z}\rangle$ degli autostati di $l_1^2$, $l_{1z}$, $l_2^2$, $l_{2z}$, dal vettore

$$|\psi\rangle_{t=0} = |1,1\rangle|1,-1\rangle$$

**1)** Quali sono i possibili valori di una misura di $l_z$ e $l^2$ e con quale probabilità?

**2)** Sia

$$H = \frac{L^2}{2I} + \lambda\vec{L}_1 \cdot \vec{L}_2 \ ,$$

determinare $|\psi\rangle_t$ e il valor medio dell'Hamiltoniana.

**3)** Rispondere alla domanda 1) con $t$ generico.

**4)** Una misura di $l_z$ e $l^2$ al tempo $t = \bar{t}$ dà come risultato $l_z = l^2 = 0$. Quali sono i possibili valori di una misura di $l_{1z}$ e $l_1^2$ ad un tempo $t > \bar{t}$ e con quale probabilità?

## Soluzione

**1)** Una misura di $l_z$ darà come risultato

$$l_z = l_{1z} + l_{2z} = 0 \ ,$$

con probabilità

$$P(l_z = 0) = 1.$$

Per determinare i possibili risultati di una misura di $l^2$ scriviamo lo stato del sistema nella base $|l, l_z, l_1, l_2\rangle$ degli autostati di $l^2$, $l_z$, $l_1^2$, $l_2^2$

$$|1,1\rangle|1,-1\rangle = \alpha|2,0,1,1\rangle + \beta|1,0,1,1\rangle + \gamma|0,0,1,1\rangle \ .$$

Sapendo che

$$|2,0,1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|1,1\rangle|1,-1\rangle + 2|1,0\rangle|1,0\rangle + |1,-1\rangle|1,1\rangle) \ ,$$

$$|1,0,1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,1\rangle|1,-1\rangle - |1,-1\rangle|1,1\rangle) \ ,$$

$$|0,0,1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|1,1\rangle|1,-1\rangle - |1,0\rangle|1,0\rangle + |1,-1\rangle|1,1\rangle) \ ,$$

imponiamo le relazioni di ortonormalità per ottenere i coefficienti $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$:

$$0 = \langle 1, 0|\langle 1, 0|1, 1\rangle|1, -1\rangle = 2\frac{\alpha}{\sqrt{6}} - \frac{\gamma}{\sqrt{3}} \ ,$$

$$0 = \langle 1, -1|\langle 1, 1|1, 1\rangle|1, -1\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{6}} + \frac{\beta}{\sqrt{2}} + \frac{\gamma}{\sqrt{3}} \ ,$$

$$1 = \langle 1, 1|\langle 1, -1|1, 1\rangle|1, -1\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{6}} - \frac{\beta}{\sqrt{2}} + \frac{\gamma}{\sqrt{3}} \ .$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}, \qquad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} \ .$$

Quindi

$$|\psi\rangle_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{6}}|2, 0, 1, 1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1, 0, 1, 1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|0, 0, 1, 1\rangle \ ,$$

$$l^2 = l(l+1) = \begin{cases} 6 \\ 2 \\ 0 \end{cases} \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} P(l=2) = 1/6 \\ P(l=1) = 1/2 \\ P(l=0) = 1/3 \end{cases} \ .$$

**2)**

$$L^2 = (L_1 + L_2)^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2L_1 \cdot L_2$$

quindi

$$H = \frac{L^2}{2I} + \lambda L_1 \cdot L_2 = \frac{L^2}{2I} + \frac{\lambda}{2}(L^2 - L_1^2 - L_2^2) \ .$$

L'evoluzione temporale è data da

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_t &= e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi\rangle_{t=0} \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}}e^{-i\hbar(\frac{3}{I}+\lambda)t}|2, 0, 1, 1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\hbar(\frac{1}{I}-\lambda)t}|1, 0, 1, 1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\hbar 2\lambda t}|0, 0, 1, 1\rangle \ . \end{aligned}$$

$$\langle H\rangle = \langle\psi|H|\psi\rangle = \frac{\hbar^2}{6}\left(\frac{3}{I} + \lambda\right) + \frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{1}{I} - \lambda\right) - \frac{2\hbar^2}{3}\lambda = \hbar^2\left(\frac{1}{I} - \lambda\right)$$

**3)**

$$[H, L^2] = [H, L_z] = 0$$

perciò il possibili valori delle misure di $l^2$ e $l_z$ e le rispettive probabilità non variano nel tempo.

**4)**

$$|\psi\rangle_{\bar{t}} = |0,0,1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|1,1\rangle|1,-1\rangle - |1,0\rangle|1,0\rangle + |1,-1\rangle|1,1\rangle) \ ,$$

perciò

$$l_1^2 = l_1(l_1+1) = 2 \qquad \text{con} \qquad P(l_1 = 1) = 1$$

$$l_{1z} = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases} \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} P(l_{1z} = 1) = 1/3 \\ P(l_{1z} = 0) = 1/3 \\ P(l_{1z} = -1) = 1/3 \end{cases} \ .$$

# Esercizio 7

Si consideri la seguente Hamiltoniana:

$$H = \frac{\vec{L}_1^2}{2MR^2} + \frac{\vec{L}_2^2}{2MR^2} + \alpha \vec{L}_1 \cdot \vec{L}_2 \ , \qquad \alpha > 0 \ .$$

**1)** Determinare le condizioni per cui $H$ è limitata inferiormente.

**2)** Determinare autostati e autovalori di $H$.

**3)** Sia dato, nella base $|l_1, l_{1z}\rangle |l_2, l_{2z}\rangle$ degli autostati di $L_1^2$, $L_{1z}$, $L_2^2$, $L_{2z}$, lo stato definito al tempo $t = 0$

$$|\psi\rangle_{t=0} = |1, 0\rangle |1, -1\rangle$$

determinare lo stato al tempo $t$.

**4)** Determinare i valori possibili di una misura di $L_1$ e di $L_{1z}$ .

## Soluzione

**1)**

$$\vec{L}_1 \cdot \vec{L}_2 = \frac{\vec{L}^2 - \vec{L}_1^2 - \vec{L}_2^2}{2}$$

quindi

$$H = \frac{\vec{L}_1^2}{2MR^2} + \frac{\vec{L}_2^2}{2MR^2} + \alpha \left( \frac{\vec{L}^2 - \vec{L}_1^2 - \vec{L}_2^2}{2} \right) = \frac{\vec{L}_1^2 + \vec{L}_2^2}{2} \left( \frac{1}{MR^2} - \alpha \right) + \frac{\alpha}{2} \vec{L}^2 \ .$$

Chiaramente se

$$\alpha > 1/MR^2$$

$H$ non è limitata inferiormente infatti per $\vec{L}_2 = -\vec{L}_1$ abbiamo che $\vec{L} = 0$ e

$$H = -\left( \alpha - \frac{1}{MR^2} \right) \vec{L}_1^2$$

ovvero negativa e arbitrariamente grande. Perciò la condizone da imporre perchè $H$ sia limitata inferiormente è

$$\alpha \leq 1/MR^2 \ .$$

**2)** Scegliamo come base, la base $|l, l_z, l_1, l_2\rangle$ degli autostati simultanei di $L^2$, $L_z$, $L_1$ e $L_2$.
Dal momento che

$$[H, L^2] = [H, L_z] = [H, L_1] = [H, L_2] = 0$$

$|l, l_z, l_1, l_2\rangle$ è una base di autostati di $H$.
Gli autovalori sono

$$E_{l,l_1,l_2} = \hbar^2 \left( \frac{l_1(l_1+1) + l_2(l_2+1)}{2} \left( \frac{1}{MR^2} - \alpha \right) + \frac{\alpha}{2} l(l+1) \right) \ .$$

**3)** Esprimiamo lo stato $|1,0\rangle|1,-1\rangle$ nella base di $|l, l_z, l_1, l_2\rangle$:

$$|1,0\rangle|1,-1\rangle = a|2,-1,1,1\rangle + b|1,-1,1,1\rangle \ ,$$

dove

$$|2,-1,1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,-1\rangle|1,0\rangle + |1,0\rangle|1,-1\rangle)$$
$$|1,-1,1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,-1\rangle|1,0\rangle - |1,0\rangle|1,-1\rangle)$$

imponiamo le condizioni di ortonormalità:

$$1 = \langle 1,0|\langle 1,-1|1,0\rangle|1,-1\rangle = a^2 + b^2$$
$$0 = \langle 1,-1|\langle 1,0|1,0\rangle|1,-1\rangle = \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}} \ ,$$

e otteniamo

$$|1,0\rangle|1,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2,-1,1,1\rangle - |1,-1,1,1\rangle) \ .$$

L'evoluzione temporale è data da

$$|\psi\rangle_t = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|1,0\rangle|1,-1\rangle = \frac{e^{-\frac{i\hbar t}{MR^2}}}{\sqrt{2}}(e^{-i\alpha\hbar t}|2,-1,1,1\rangle - e^{+i\alpha\hbar t}|1,-1,1,1\rangle)$$
$$= e^{-\frac{i\hbar t}{MR^2}}(\cos(\alpha\hbar t)|1,0\rangle|1,-1\rangle + i\sin(\alpha\hbar t)|1,-1\rangle|1,0\rangle) \ .$$

**3)** Una misura di $L_1$ e $L_{1z}$ darà come risultato:

$$L_1 = \hbar \qquad \text{con} \qquad P(l_1 = 1) = 1$$
$$l_{1z} = \begin{cases} -\hbar \\ 0 \end{cases} \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} P(l_{1z} = -1) = \sin^2(\alpha\hbar t) \\ P(l_{1z} = 0) = \cos^2(\alpha\hbar t) \end{cases}$$

# Esercizio 8

Sia data, in uno spazio bidimensionale, l'Hamiltoniana di un sistema di due particelle:

$$H = \frac{|\vec{p}_1|^2}{2m_1} + \frac{|\vec{p}_2|^2}{2m_2} + k|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2 \qquad \text{dove} \qquad k = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\frac{\omega^2}{2} = \mu\frac{\omega^2}{2}$$

**1)** Determinare autostati e autovalori di $H$.

**2)** Sia dato uno stato descritto dalla funzione

$$Q(x, y, t = 0) = N(2 + \frac{\mu\omega}{\hbar}xy)\exp(-\frac{\mu\omega}{2\hbar}(x^2 + y^2))$$

e sia

$$H_r = \frac{|\vec{p}|^2}{2\mu} + \frac{\mu\omega^2}{2}|\vec{x}|^2 \ , \quad \vec{x} = (x, y) \ , \quad \vec{p} = (p_x, p_y) \ .$$

determinare $Q(x, y, t)$.

**3)** Determinare i possibili valori di una misura dell'operatore $l_z$ al tempo $t$ e le rispettive probabilità.

## Soluzione

**1)** Introduciamo la coordinata del centro di massa e relativa:

$$\begin{cases} \vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \\ \vec{r} \ = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} \end{cases}$$

quindi

$$H = H_{cm} + H_r \ ,$$

$$H_{cm} = \frac{|\vec{P}|^2}{2M} \ ,$$

$$H_r = \frac{|\vec{p}|^2}{2\mu} + \frac{\mu\omega^2}{2}|\vec{r}|^2 \ ,$$

dove $\vec{P} = M\dot{\vec{R}}$ , $\quad \vec{p} = \mu\dot{\vec{r}}$ , $\quad M = m_1 + m_2$ .

In questo sistema di coordinate l'Hamiltoniana si separa nella somma di due Hamiltoniane indipendenti: la prima descrive una particella libera di massa $M$, la seconda descrive un oscillatore armonico bidimensionale isotropo di massa $\mu$ e pulsazione $\omega$.

La soluzione dell'equazione di Schrödinger

$$H\ \psi(\vec{R},\vec{r}) = E\ \psi(\vec{R},\vec{r})$$

sarà quindi del tipo

$$\psi(\vec{R},\vec{r}) = \phi(\vec{R})\varphi(\vec{r})\ , \qquad E = E_{cm} + E_r$$

dove

$$\phi(\vec{R}) = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{P}\cdot\vec{R}}\ , \qquad E_{cm} = \frac{|\vec{P}|^2}{2M}$$

è la soluzione dell'Hamiltoniana di particella libera, mentre $\varphi(\vec{r})$ è soluzione di un oscillatore bidimensionale isotropo. Pertanto

$$H_r = H_x + H_y = \frac{p_x^2}{2\mu} + \frac{\mu\omega^2}{2}x^2 + \frac{p_y^2}{2\mu} + \frac{\mu\omega^2}{2}y^2\ ,$$

dove $\vec{r} = (x,y)$ , $\vec{p} = (p_x, p_y)$ ,

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi_{n_1}(x)\varphi_{n_2}(y)\ , \qquad E_r = (n_1 + \frac{1}{2})\hbar\omega + (n_2 + \frac{1}{2})\hbar\omega = (n_1 + n_2 + 1)\hbar\omega$$

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi)\ , \qquad \xi = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}x\ ,$$

$$H_0(\xi) = 1\ , \qquad H_1(\xi) = 2\xi\ .$$

**2)**

$$\begin{aligned} Q(x,y,t=0) &= 2N\left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}\right)^{-1/2}\left(\frac{1}{4}\varphi_1(x)\varphi_1(y) + \varphi_0(x)\varphi_0(y)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{17}}\left(\varphi_1(x)\varphi_1(y) + 4\varphi_0(x)\varphi_0(y)\right)\ , \end{aligned}$$

dove abbiamo determinato $N$ imponendo la normalizzazione della funzione d'onda.

L'evoluzione temporale dello stato sarà quindi

$$\begin{aligned} Q(x,y,t) &= e^{-\frac{i}{\hbar}H_r t} Q(x,y,t=0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{17}}\left(\varphi_1(x)\varphi_1(y)e^{-3i\omega t} + 4\varphi_0(x)\varphi_0(y)e^{-i\omega t}\right)\ . \end{aligned}$$

**3)** Per determinare i possibili valori di una misura di $l_z$ dobbiamo esprimere lo stato $Q(x,y,t)$ in funzione degli autostati del momento angolare, ovvero dobbiamo passare dalla base $|n_1, n_2\rangle$ alla base $|n, l, l_z\rangle$ con $n = n_1 + n_2$ .

Ricordiamo che siamo in uno spazio bidimensionale $(x, y)$ pertanto

$$l_x = l_y = 0 \ , \quad l^2 = l_z^2 \ , \quad l_z = \pm l \ .$$

Le autofunzioni del momento angolare saranno quindi

$$\psi_{n,l,l_z}(r, \theta = \pi/2, \phi) = R_{n,l}(r) Y_{l,\pm l} (\pi/2, \phi)$$

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x)\varphi_0(y) &= \left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\frac{\mu\omega}{2\hbar}(x^2+y^2)} = \left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}\right)^{-1/4} R_{0,0}(r) Y_{0,0}(\pi/2, \phi) \\
\varphi_1(x)\varphi_1(y) &= 2\left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\frac{\mu\omega}{2\hbar}(x^2+y^2)} \frac{\mu\omega}{\hbar} xy = 2\left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\frac{\mu\omega}{2\hbar}r^2} \frac{\mu\omega}{\hbar} r^2 \sin\phi\cos\phi \\
&= \left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}\right)^{-1/4} R_{2,2}(r) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(Y_{2,2}(\pi/2, \phi) - Y_{2,-2}(\pi/2, \phi)\right) \ ,
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato che

$$R_{0,0}(r) = 2\left(\frac{\mu\omega}{\hbar}\right)^{3/4} \pi^{-1/4} e^{-\frac{\mu\omega}{2\hbar}r^2} \ , \quad R_{2,2}(r) = \frac{4}{\sqrt{15}}\left(\frac{\mu\omega}{\hbar}\right)^{7/4} \pi^{-1/4} r^2 e^{-\frac{\mu\omega}{2\hbar}r^2}$$

$$Y_{0,0}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \ , \quad Y_{2,\pm 2}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\theta e^{\pm 2i\phi} \ .$$

Perciò

$$\begin{aligned}
Q(x,y,t) = \frac{\left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}\right)^{-1/4}}{\sqrt{17}} \Bigg( &\frac{1}{\sqrt{2}} R_{2,2}(r) \left(Y_{2,2}(\pi/2, \phi) - Y_{2,-2}(\pi/2, \phi)\right) e^{-3it} \\
&+ 4R_{0,0}(r) Y_{0,0}(\pi/2, \phi) e^{-it} \Bigg) \ .
\end{aligned}$$

I possibili valori di una misura di $l_z$ sono

$$l_z = \begin{cases} 2 \\ 0 \\ -2 \end{cases}$$

con probabilità

$$P(l_z = 2) = P(l_z = -2) = \frac{1}{34} \qquad P(l_z = 0) = \frac{16}{17} \ .$$

# Esercizio 9

Si consideri una particella di spin $\frac{1}{2}$ e momento angolare 1, la cui evoluzione temporale è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = \alpha \vec{L}^2 + \beta \vec{S}^2 + \gamma(L_z + 2S_z) \ .$$

**1)** Determinare gli autostati relativi al momento angolare totale, $\vec{J}^2$ e $J_z$, con $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$.

**2)** Sia dato lo stato del sistema al tempo $t = 0$

$$|\psi\rangle_{t=0} = |3/2, 1/2, 1, 1/2\rangle_{j,j_z,l,s} \ ,$$

determinare quali valori può dare una misura di $\vec{J}^2$ e $\vec{J}_z$ ad un generico tempo $t$ e con che probabilità.

**3)** All'istante $\bar{t}$ si misura $j^2$ e si ottiene come risultato $\frac{3}{4}$ ; determinare quali valori può dare e con che probabilità una misura di $S_z$ ad un tempo $t > \bar{t}$ .

## Soluzione

**1)** Scriviamo il passaggio di base dalla base $|j, j_z, l, s\rangle$ degli autostati degli operatori $j^2$, $j_z$, $l^2$, $s^2$, alla base $|l, l_z\rangle|s, s_z\rangle$ degli autostati degli operatori $l^2$, $l_z$, $s^2$, $s_z$.

Partiamo dallo stato con $j_z = l_z + s_z$ massimo ovvero $j_z = \frac{3}{2}$, $l_z = 1$, $s_z = \frac{1}{2}$ e applichiamo ripetutamente l'operatore $j_- = l_- + s_-$, otteniamo così i seguenti stati:

$$|3/2, 3/2, 1, 1/2\rangle = |1, 1\rangle|1/2, 1/2\rangle \ ,$$

$$|3/2, 1/2, 1, 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big\{\sqrt{2}|1, 0\rangle|1/2, 1/2\rangle + |1, 1\rangle|1/2, -1/2\rangle\Big\} \ ,$$

$$|3/2, -1/2, 1, 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big\{|1, -1\rangle|1/2, 1/2\rangle + \sqrt{2}|1, 0\rangle|1/2, -1/2\rangle\Big\} \ ,$$

$$|3/2, -3/2, 1, 1/2\rangle = |1, -1\rangle|1/2, -1/2\rangle \ ,$$

$$|1/2, 1/2, 1, 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big\{\sqrt{2}|1, 1\rangle|1/2, -1/2\rangle - |1, 0\rangle|1/2, 1/2\rangle\Big\} \ ,$$

$$|1/2, -1/2, 1, 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big\{|1, 0\rangle|1/2, -1/2\rangle - \sqrt{2}|1, -1\rangle|1/2, 1/2\rangle\Big\} \ ,$$

dove gli stati $|j = \frac{1}{2}, \ j_z = \pm\frac{1}{2}\rangle$ sono stati ottenuti imponendo la condizione di ortogonalità con i corrispondenti stati $|j = \frac{3}{2}, \ j_z = \pm\frac{1}{2}\rangle$ .

**2)** L'evoluzione temporale è data da

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle_t &= e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi\rangle_{t=0} \\
&= e^{-\frac{i}{\hbar}\left[\alpha\vec{L}^2+\beta\vec{S}^2+\gamma(L_z+2S_z)\right]t}\frac{1}{\sqrt{3}}\Big\{\sqrt{2}|1,0\rangle|1/2,1/2\rangle + |1,1\rangle|1/2,-1/2\rangle\Big\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\Big\{\sqrt{2}|1,0\rangle|1/2,1/2\rangle e^{-i(2\alpha\hbar+\frac{3}{4}\beta\hbar+\gamma)t} + |1,1\rangle|1/2,-1/2\rangle e^{-i(2\alpha\hbar+\frac{3}{4}\beta\hbar)t}\Big\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-i(2\alpha\hbar+\frac{3}{4}\beta\hbar+\frac{1}{2}\gamma)t}\Big\{\sqrt{2}|1,0\rangle|1/2,1/2\rangle e^{-\frac{i}{2}\gamma t} + |1,1\rangle|1/2,-1/2\rangle e^{\frac{i}{2}\gamma t}\Big\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-i(2\alpha\hbar+\frac{3}{4}\beta\hbar+\frac{1}{2}\gamma)t}\Big\{\sqrt{\frac{2}{3}}\Big(\sqrt{2}|3/2,1/2,1,1/2\rangle - |1/2,1/2,1,1/2\rangle\Big)e^{-\frac{i}{2}\gamma t} \\
&\quad +\frac{1}{\sqrt{3}}\Big(|3/2,1/2,1,1/2\rangle + \sqrt{2}|1/2,1/2,1,1/2\rangle\Big)e^{\frac{i}{2}\gamma t}\Big\} \\
&= \frac{1}{3}e^{-i(2\alpha\hbar+\frac{3}{4}\beta\hbar+\frac{1}{2}\gamma)t}\Big\{\Big(3\cos\frac{\gamma t}{2} - i\sin\frac{\gamma t}{2}\Big)|3/2,1/2,1,1/2\rangle \\
&\quad -i2\sqrt{2}\sin\frac{\gamma t}{2}|1/2,1/2,1,1/2\rangle\Big\}\ .
\end{aligned}
$$

Una misura di $J^2$ darà come risultato

$$
J^2 = \hbar^2 j(j+1) = \hbar^2\left\{\begin{array}{c} 15/4 \\ 3/4 \end{array}\right.
$$

con probabilità

$$
P\Big(j=\frac{3}{2}\Big) = \frac{1}{9}\Big(9\cos^2\frac{\gamma t}{2} + \sin^2\frac{\gamma t}{2}\Big)\ , \qquad P\Big(j=\frac{1}{2}\Big) = \frac{8}{9}\sin^2\frac{\gamma t}{2}\ ;
$$

mentre una misura di $J_z$ darà come risultato

$$
J_z = \frac{\hbar}{2}
$$

con probabilità

$$
P\Big(j_z=\frac{1}{2}\Big) = 1\ .
$$

**3)** Al tempo $t=\bar{t}$ lo stato collassa nell'autostato di $j^2$ con autovalore $j(j+1)=\frac{3}{4}$ perciò

$$
|\psi\rangle_{\bar{t}} = |1/2,1/2,1,1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big\{|1,0\rangle|1/2,1/2\rangle - \sqrt{2}|1,1\rangle|1/2,-1/2\rangle\Big\}\ .
$$

L'evoluzione temporale è data da

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle_{t>\bar{t}} &= e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi\rangle_{\bar{t}} \\
&= e^{-\frac{i}{\hbar}\left[\alpha\vec{L}^2+\beta\vec{S}^2+\gamma(L_z+2S_z)\right]t}\frac{1}{\sqrt{3}}\Big\{|1,0\rangle|1/2,1/2\rangle-\sqrt{2}|1,1\rangle|1/2,-1/2\rangle\Big\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\Big\{|1,0\rangle|1/2,1/2\rangle e^{-i(2\alpha\hbar+\frac{3}{4}\beta\hbar+\gamma)t}-\sqrt{2}|1,1\rangle|1/2,-1/2\rangle e^{-i(2\alpha\hbar+\frac{3}{4}\beta\hbar)t}\Big\}\ .
\end{aligned}$$

Una misura di $S_z$ darà come risultato

$$S_z = \hbar s_z = \hbar\left\{\begin{array}{c} 1/2 \\ -1/2 \end{array}\right.$$

con probabilità

$$P\Big(s_z=\frac{1}{2}\Big)=\frac{1}{3}\ , \qquad P\Big(s_z=-\frac{1}{2}\Big)=\frac{2}{3}\ .$$

# Esercizio 10

Una particella di spin 1 e massa $m$ è vincolata a muoversi sulla superfice di una sfera di raggio $R$ ed è immersa in un campo magnetico $B$ diretto lungo l'asse $z$, la sua Hamiltoniana è:

$$H = \frac{|\vec{L}|^2}{2mR^2} + \frac{\mu_B}{\hbar} B(L_z + 2S_z).$$

All'istante iniziale una misura di $J^2$ dà con certezza $2\hbar^2$, una di $J_z$ dà con certezza $+\hbar$ e una di $L^2$ dà un risultato minore o uguale a $2\hbar^2$; la probabilità di trovare $S_z = +\hbar$ è $2/3$ e quella di $S_z = -\hbar$ è 0, infine il valor medio di $\cos\theta$ è il massimo possibile.

**1)** Determinare lo stato del sistema a un tempo $t$ generico.

**2)** Determinare in funzione del tempo il valor medio di $\cos\theta$ e di $J^2$.

## Soluzione

**1)** Abbiamo che:

$$J^2 = \hbar^2 j(j+1) = 2\hbar^2 \ , \qquad J_z = \hbar j_z = \hbar \ , \qquad L^2 = \hbar^2 l(l+1) \leq 2\hbar^2 \ ,$$

ovvero

$$j = 1 \ , \qquad j_z = 1 \ , \qquad l \leq 1 \ ,$$

perciò nella base $|j, j_z, l, s\rangle$ degli autostati di $j^2$, $j_z$, $l^2$ e $s^2$ lo stato sarà descritto dal vettore

$$|\psi\rangle_{t=0} = \alpha|1,1,1,1\rangle + \beta|1,1,0,1\rangle \ , \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \ , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \ ,$$

mentre nella base $|l, l_z\rangle|s, s_z\rangle$ degli autostati di $l^2$, $l_z$, $s^2$, $s_z$,

$$|\psi\rangle_{t=0} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\Big\{|1,1\rangle|1,0\rangle - |1,0\rangle|1,1\rangle\Big\} + \beta|0,0\rangle|1,1\rangle \ .$$

Poichè dev'essere che

$$P(s_z = 1) = 2/3 \ , \qquad P(s_z = -1) = 0 \ , \qquad P(s_z = 0) = 1/3 \ ,$$

avremo che

$$\frac{|\alpha|^2}{2} + |\beta|^2 = \frac{2}{3} \ , \qquad \frac{|\alpha|^2}{2} = \frac{1}{3} \ ,$$

perciò, a meno di un fattore di fase complessivo lo stato è dato da

$$|\psi\rangle_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big\{|1,1\rangle|1,0\rangle - |1,0\rangle|1,1\rangle\Big\} + \frac{e^{i\delta}}{\sqrt{3}}|0,0\rangle|1,1\rangle \ .$$

Imponiamo ora la condizione che il valor medio di $\cos\theta$ sia massimo:

$$\begin{aligned}
\langle\cos\theta\rangle_{t=0} &= \langle\psi|\cos\theta|\psi\rangle_{t=0} \\
&= \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\Big\{\langle 1,1|\langle 1,0| - \langle 1,0|\langle 1,1|\Big\} + \frac{e^{-i\delta}}{\sqrt{3}}\langle 0,0|\langle 1,1|\right]\cos\theta \\
&\quad \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\Big\{|1,1\rangle|1,0\rangle - |1,0\rangle|1,1\rangle\Big\} + \frac{e^{i\delta}}{\sqrt{3}}|0,0\rangle|1,1\rangle\right] \\
&= \frac{1}{3}\Big\{\langle 1,1|\cos\theta|1,1\rangle_{l,l_z} + \langle 1,0|\cos\theta|1,0\rangle_{l,l_z} - e^{i\delta}\langle 1,0|\cos\theta|0,0\rangle_{l,l_z} \\
&\quad -e^{-i\delta}\langle 0,0|\cos\theta|1,0\rangle_{l,l_z} + \langle 0,0|\cos\theta|0,0\rangle_{l,l_z}\Big\} \\
&= \frac{1}{3}\Big\{\int\cos\theta\;|Y_{1,1}|^2 d\Omega + \int\cos\theta\;|Y_{1,0}|^2 d\Omega - e^{i\delta}\int\cos\theta\;Y^*_{1,0}\;Y_{0,0}\;d\Omega \\
&\quad -e^{-i\delta}\int\cos\theta\;Y^*_{0,0}\;Y_{1,0}\;d\Omega + \int\cos\theta\;|Y_{0,0}|^2 d\Omega\Big\} \\
&= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\cos\theta\sin^2\theta\;d\cos\theta + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\cos^3\theta\;d\cos\theta - \frac{e^{i\delta}}{2\sqrt{3}}\int_{-1}^{1}\cos^2\theta\;d\cos\theta \\
&\quad -\frac{e^{-i\delta}}{2\sqrt{3}}\int_{-1}^{1}\cos^2\theta\;d\cos\theta + \frac{1}{6}\int_{-1}^{1}\cos\theta\;d\cos\theta \\
&= -\frac{1}{3\sqrt{3}}\Big(e^{i\delta} + e^{-i\delta}\Big) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}\cos\delta
\end{aligned}$$

dove

$$Y_{0,0}(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\;, \quad Y_{1,0}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\;, \quad Y_{1,1}(\theta,\phi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\;e^{i\phi}\;.$$

Perciò il valor medio di $\cos\theta$ è massimo per $\delta = \pi$ , quindi

$$|\psi\rangle_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(|1,1\rangle|1,0\rangle - |1,0\rangle|1,1\rangle - |0,0\rangle|1,1\rangle\Big)\;.$$

Possiamo ora determinare l'evoluzione temporale dello stato:

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle_t &= e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi\rangle_t = \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}}{\sqrt{3}}\Big(|1,1\rangle|1,0\rangle - |1,0\rangle|1,1\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|0,0\rangle|1,1\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(e^{-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{\hbar^2}{mR^2}+\mu B\right)t}|1,1\rangle|1,0\rangle - e^{-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{\hbar^2}{mR^2}+2\mu B\right)t}|1,0\rangle|1,1\rangle + e^{-\frac{i}{\hbar}2\mu Bt}|0,0\rangle|1,1\rangle\Big)\;.
\end{aligned}$$

**2)**

$$
\begin{aligned}
\langle \cos\theta \rangle_t &= \langle \psi | \cos\theta | \psi \rangle_t \\
&= \frac{1}{3} \Bigg\{ \langle 1,1| \cos\theta |1,1\rangle_{l,l_z} + \langle 1,0| \cos\theta |1,0\rangle_{l,l_z} + e^{i\frac{\hbar t}{mR^2}} \langle 1,0| \cos\theta |0,0\rangle_{l,l_z} \\
&\qquad + e^{-i\frac{\hbar t}{mR^2}} \langle 0,0| \cos\theta |1,0\rangle_{l,l_z} + \langle 0,0| \cos\theta |0,0\rangle_{l,l_z} \Bigg\} \\
&= \frac{1}{3\sqrt{3}} \Big( e^{i\frac{\hbar t}{mR^2}} + e^{-i\frac{\hbar t}{mR^2}} \Big) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \cos\left( \frac{\hbar t}{mR^2} \right) .
\end{aligned}
$$

Per calcolare $\langle J^2 \rangle_t$ dobbiamo esprimere lo stato nella base $|j, j_z, l, s\rangle$ degli autostati di $j^2$, $j_z$, $l^2$ e $s^2$:

$$
\begin{aligned}
|1,1\rangle|1,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Big( |2,1,1,1\rangle + |1,1,1,1\rangle \Big) , \\
|1,0\rangle|1,1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Big( |2,1,1,1\rangle - |1,1,1,1\rangle \Big) , \\
|0,0\rangle|1,0\rangle &= |1,1,0,1\rangle ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle_t = \frac{1}{\sqrt{3}} \Bigg\{ & \frac{1}{\sqrt{2}} \Big( e^{-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{\hbar^2}{mR^2}+\mu B\right)t} - e^{-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{\hbar^2}{mR^2}+2\mu B\right)t} \Big) |2,1,1,1\rangle \\
& + \frac{1}{\sqrt{2}} \Big( e^{-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{\hbar^2}{mR^2}+\mu B\right)t} + e^{-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{\hbar^2}{mR^2}+2\mu B\right)t} \Big) |1,1,1,1\rangle \\
& + e^{-\frac{i}{\hbar}2\mu B t} |1,1,0,1\rangle \Bigg\} .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle J^2 \rangle_t &= \langle \psi | J^2 | \psi \rangle_t = \frac{1}{3} \left\{ 3\hbar^2 \left( 2 - 2\cos\left( \mu B t/\hbar \right) \right) + \hbar^2 \left( 2 + 2\cos\left( \mu B t/\hbar \right) \right) + 2\hbar^2 \right\} \\
&= \frac{\hbar^2}{3} \left\{ 10 - 4\cos\left( \mu B t/\hbar \right) \right\} .
\end{aligned}
$$

# Esercizio 11

L'Hamiltoniana di una particella di massa $m$ e spin 1/2 che si muove in tre dimensioni ha la forma:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \vec{r}^2}{2} + \alpha \vec{L} \cdot \vec{S} \ .$$

**1)** Trovare gli autostati e gli autovalori dell'Hamiltoniana;

**2)** All'istante $t = 0$ la particella si trova in un autostato $|\psi\rangle$ tale che

i) una misura dell'energia può dare i valori $E_1 = 5/2\hbar\omega + \alpha\hbar^2/2$ oppure $E_2 = 5/2\hbar\omega - \alpha\hbar^2$ ;

ii) se si misurano il momento angolare orbitale e lo spin lungo l'asse $z$ si ottengono con certezza i valori $L_z = +\hbar$ e $S_z = -\hbar/2$ .

Determinare il valor medio dell'energia e lo stato del sistema all'istante $t$ generico;

**3)** Determinare il valor medio di $L_z$ all'istante $t$ generico.

## Soluzione

**1)**

$$\vec{J}^2 = (\vec{L} + \vec{S})^2 = \vec{L}^2 + \vec{S}^2 + 2\vec{L} \cdot \vec{S} \ , \qquad \vec{L} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2}(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2) \ ,$$

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \vec{r}^2}{2} + \frac{\alpha}{2}(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2) = H_o + \frac{\alpha}{2}(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2) \ ,$$

$$H_o = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \vec{r}^2}{2} \ .$$

$$[J^2, H_o] = [J_z, H_o] = [L^2, H_o] = [S^2, H_o] = 0 \ ,$$

perciò la base $|n, j, j_z, l, s\rangle$ degli autostati degli operatori $H_o$, $J^2$, $J_z$, $L^2$, $S^2$ è anche una base di autostati di $H$. Gli autovalori sono

$$E_{n,j,l,s} = \hbar\omega(n + \frac{3}{2}) + \hbar^2 \frac{\alpha}{2}[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)] \ .$$

**2)**

$$E_1 = \frac{5}{2}\hbar\omega + \frac{\alpha}{2}\hbar^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{2}\hbar\omega = \hbar\omega(n+\frac{3}{2}) \quad \Rightarrow \quad n=1,\ l=1,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\alpha}{2}\hbar^2 = \frac{\alpha}{2}\hbar^2\Big\{j(j+1) - 2 - \frac{3}{4}\Big\} \quad \Rightarrow \quad j = \frac{3}{2}\ .$$

$$E_2 = \frac{5}{2}\hbar\omega - \alpha\hbar^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{2}\hbar\omega = \hbar\omega(n+\frac{3}{2}) \quad \Rightarrow \quad n=1,\ l=1,$$

$$\Rightarrow \quad -\alpha\hbar^2 = \frac{\alpha}{2}\hbar^2\Big\{j(j+1) - 2 - \frac{3}{4}\Big\} \quad \Rightarrow \quad j = \frac{1}{2}\ .$$

Omettiamo di scrivere $n = 1$ nello stato, sarà sottinteso quindi che

$$|j, j_z, l, s\rangle = |n, j, j_z, l, s\rangle = |1, j, j_z, l, s\rangle\ .$$

A meno di una fase complessiva lo stato sarà dato da

$$|\psi\rangle_{t=0} = a|3/2, 1/2, 1, 1/2\rangle + be^{i\delta}|1/2, 1/2, 1, 1/2\rangle\ , \quad a^2+b^2=1\ , \quad a, b \in \mathbb{R}$$

scriviamo ora lo stato nella base $|l, l_z\rangle|s, s_z\rangle$:

$$|3/2, 1/2, 1, 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big\{|1,1\rangle|1/2,-1/2\rangle + \sqrt{2}|1,0\rangle|1/2,1/2\rangle\Big\}\ ,$$

$$|1/2, 1/2, 1, 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big\{\sqrt{2}|1,1\rangle|1/2,-1/2\rangle - |1,0\rangle|1/2,1/2\rangle\Big\}\ ,$$

$$\begin{aligned}|\psi\rangle_{t=0} = &\frac{a}{\sqrt{3}}\Big\{|1,1\rangle|1/2,-1/2\rangle + \sqrt{2}|1,0\rangle|1/2,1/2\rangle\Big\} \\ &+\frac{b}{\sqrt{3}}e^{i\delta}\Big\{\sqrt{2}|1,1\rangle|1/2,-1/2\rangle - |1,0\rangle|1/2,1/2\rangle\Big\}\ ,\end{aligned}$$

siccome dev'essere che $L_z = +\hbar$ e $S_z = -\hbar/2$ allora

$$\sqrt{\frac{2}{3}}a - \frac{e^{i\delta}}{\sqrt{3}}b = 0\ , \qquad \delta = 0\ , \quad a = \frac{1}{\sqrt{3}}\ , \quad b = \sqrt{\frac{2}{3}}\ .$$

Pertanto

$$|\psi\rangle_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{3}}|3/2, 1/2, 1, 1/2\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1/2, 1/2, 1, 1/2\rangle\ .$$

L'evoluzione temporale è data da

$$|\psi\rangle_t = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t}|\psi\rangle_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}|3/2, 1/2, 1, 1/2\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}|1/2, 1/2, 1, 1/2\rangle\ .$$

$$\langle\mathcal{H}\rangle_t = \langle\psi|\mathcal{H}|\psi\rangle_t = \frac{1}{3}E_1 + \frac{2}{3}E_2 = \frac{1}{3}(E_1 + 2E_2) = \frac{5}{2}\hbar\omega - \frac{\alpha\hbar^2}{2}\ .$$

**3)** Per determinare $\langle L_z \rangle_t$ bisogna scrivere lo stato $|\psi\rangle_t$ nella base $|l, l_z\rangle|s, s_z\rangle$:

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle_t &= \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}|3/2, 1/2, 1, 1/2\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}|1/2, 1/2, 1, 1/2\rangle \\
&= \frac{1}{3} e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}\Big\{|1, 1\rangle|1/2, -1/2\rangle + \sqrt{2}|1, 0\rangle|1/2, 1/2\rangle\Big\} \\
&\quad + \frac{\sqrt{2}}{3} e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}\Big\{\sqrt{2}|1, 1\rangle|1/2, -1/2\rangle - |1, 0\rangle|1/2, 1/2\rangle\Big\} \\
&= \frac{1}{3}\Big\{\Big(e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} + 2e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}\Big)|1, 1\rangle|1/2, -1/2\rangle \\
&\quad + \sqrt{2}\Big(e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} - e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}\Big)|1, 0\rangle|1/2, 1/2\rangle\Big\} \ ,
\end{aligned}
$$

da cui

$$
\begin{aligned}
\langle L_z \rangle_t &= \langle \psi | L_z | \psi \rangle_t = \frac{1}{9}\Big\{\Big[\Big(e^{\frac{i}{\hbar}E_1 t} + 2e^{\frac{i}{\hbar}E_2 t}\Big)\langle 1, 1|\langle 1/2, -1/2| \\
&\quad + \sqrt{2}\Big(e^{\frac{i}{\hbar}E_1 t} - e^{\frac{i}{\hbar}E_2 t}\Big)\langle 1, 0|\langle 1/2, 1/2|\Big]\hbar\Big(e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} + 2e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}\Big)|1, 1\rangle|1/2, -1/2\rangle \\
&= \frac{\hbar}{9}\Big(1 + 4 + 2e^{-\frac{i}{\hbar}(E_2 - E_1)t} + 2e^{\frac{i}{\hbar}(E_2 - E_1)t}\Big) = \frac{\hbar}{9}\Big[5 + 4\cos\Big(\frac{E_2 - E_1}{\hbar}t\Big)\Big] \\
&= \frac{\hbar}{9}\Big[5 + 4\cos\Big(\frac{3}{2}\alpha\hbar t\Big)\Big] \ .
\end{aligned}
$$

# Esercizio 12

Una particella di spin 1 e massa $m$, vincolata a muoversi su una superficie di raggio $R$, è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{L}^2}{2mR^2} + \frac{\omega}{\hbar}\vec{L}\cdot\vec{S} \ .$$

Al tempo $t = 0$ lo stato della particella, nella base in cui $S_z$ è diagonale, è descritto dallo spinore

$$\Psi(\theta,\phi) = N \begin{pmatrix} \sin\theta e^{-i\phi} \\ 2\cos\theta + 2\sqrt{2} \\ \sin\theta e^{+i\phi} \end{pmatrix} \ .$$

**1)** Determinare al tempo $t = 0$ i possibili risultati di una misura di $L^2$, $L_z$, $S_z$, $J^2$ e $J_z$, dove $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, e le relative probabilità;

**2)** Determinare lo stato del sistema al tempo $t$;

**3)** Dire quali dei risultati di cui al punto 1. valgono ad ogni tempo.

## Soluzione

**1)**

$$Y_{0,0}(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \ , \quad Y_{1,0}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \ , \quad Y_{1,\pm1}(\theta,\phi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta \ e^{\pm i\phi} \ ,$$

$$\begin{aligned}\Psi(\theta,\phi) = N \begin{pmatrix} \sin\theta e^{-i\phi} \\ 2\cos\theta + 2\sqrt{2} \\ \sin\theta e^{+i\phi} \end{pmatrix} &= N\sqrt{\frac{8\pi}{3}} \begin{pmatrix} Y_{1,-1} \\ \sqrt{2}Y_{1,0} + 2\sqrt{3}Y_{0,0} \\ -Y_{1,1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} Y_{1,-1} \\ \sqrt{2}Y_{1,0} + 2\sqrt{3}Y_{0,0} \\ -Y_{1,1} \end{pmatrix} \ , \qquad N = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\end{aligned}$$

dove abbiamo determinato $N$ imponendo la normalizzazione della funzione d'onda. Utilizzando la notazione di Dirac

$$\begin{aligned}|\Psi\rangle_{t=0} = \frac{1}{4}\Big(&|1,-1\rangle_{l,l_z}|1,1\rangle_{s,s_z} + \sqrt{2}|1,0\rangle_{l,l_z}|1,0\rangle_{s,s_z} + 2\sqrt{3}|0,0\rangle_{l,l_z}|1,0\rangle_{s,s_z} \\ &-|1,1\rangle_{l,l_z}|1,-1\rangle_{s,s_z}\Big) \ .\end{aligned}$$

Una misura di $L^2$, $L_z$ e $S_z$ darà come risultato:

$$L^2 = \hbar^2 \begin{cases} 2 \\ 0 \end{cases} \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} P(l=1) = 1/4 \\ P(l=0) = 3/4 \end{cases} ,$$

$$L_z = \hbar \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases} \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} P(l_z=1) = 1/16 \\ P(l_z=0) = 14/16 \\ P(l_z=-1) = 1/16 \end{cases} ,$$

$$S_z = \hbar \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases} \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} P(s_z=1) = 1/16 \\ P(s_z=0) = 14/16 \\ P(s_z=-1) = 1/16 \end{cases} .$$

Scriviamo lo stato nella base $|j, j_z, l, s\rangle$:

$$\begin{aligned}
|1,-1\rangle|1,1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}|2,0,1,1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1,0,1,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|0,0,1,1\rangle , \\
|1,0\rangle|1,0\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}|2,0,1,1\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|0,0,1,1\rangle , \\
|0,0\rangle|1,0\rangle &= |1,0,0,1\rangle , \\
|1,1\rangle|1,-1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}|2,0,1,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1,0,1,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|0,0,1,1\rangle .
\end{aligned}$$

$$|\Psi\rangle_{t=0} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\Big(|2,0,1,1\rangle - \sqrt{\frac{3}{2}}|1,0,1,1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|0,0,1,1\rangle + 3|1,0,0,1\rangle\Big) ,$$

perciò una misura di $J^2$ e $J_z$ darà come risultato:

$$J^2 = \hbar^2 \begin{cases} 6 \\ 2 \\ 0 \end{cases} \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} P(j=2) = 1/12 \\ P(j=1) = 7/8 \\ P(j=0) = 1/24 \end{cases} ,$$

$$J_z = 0 \qquad \text{con} \qquad P(j_z = 0) = 1 .$$

**2)**

$$H = \frac{\vec{L}^2}{2mR^2} + \frac{\omega}{2\hbar}(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2) ,$$

$$H|2,0,1,1\rangle = \frac{\hbar^2}{mR^2} + \hbar\omega ,$$

$$H|1,0,1,1\rangle = \frac{\hbar^2}{mR^2} - \hbar\omega \ ,$$

$$H|0,0,1,1\rangle = \frac{\hbar^2}{mR^2} - 2\hbar\omega \ ,$$

$$H|1,0,0,1\rangle = 0 \ .$$

L'evoluzione temporale dello stato è data da

$$|\Psi\rangle_t = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t}|\Psi\rangle_{t=0} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{i\hbar t}{mR^2}}}{2\sqrt{3}}\left(e^{-i\omega t}|2,0,1,1\rangle - \sqrt{\frac{3}{2}}e^{i\omega t}|1,0,1,1\rangle - \frac{e^{2i\omega t}}{\sqrt{2}}|0,0,1,1\rangle\right) + \sqrt{\frac{3}{2}}|1,0,0,1\rangle \ .$$

**3)**

$$[J^2, H] = [J_z, H] = [L^2, H] = 0 \ ,$$

perciò i possibili valori di una misura di $J^2$, $J_z$ e $L^2$ e le rispettive probabilità rimangono invariati nel tempo.

$$[L_z, H] = [S_z, H] \neq 0 \ ,$$

perciò $L_z$ e $S_z$ in generale variano nel tempo.

Tuttavia $J_z = L_z + S_z$ commuta con l'Hamiltoniana e lo stato $|\Psi\rangle$ è autostato di $J_z$ con autovalore 0. Pertanto

$$P(l_z = 1) = P(s_z = -1) \ , \ \ P(l_z = 0) = P(s_z = 0) \ , \ \ P(l_z = -1) = P(s_z = 1) \ , \ \forall t \ .$$

# Esercizio 13

Si consideri un sistema tridimensionale la cui Hamiltoniana è data da

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\vec{x}^2}{2} + \gamma L_z \ ,$$

dove $L_z$ è il momento angolare lungo l'asse $z$ e $\gamma$ è una costante positiva ($\gamma < \omega$).

**1)** Determinare gli autovalori e le autofunzioni dell'Hamiltoniana per lo stato di energia più bassa e per i primi due livelli sucessivi. Discutere le relative degenerazioni;

**2)** Se si aggiunge all'Hamiltoniana la correzione relativistica

$$V = \frac{-(\vec{p}^2)^2}{8m^3c^2} \ ,$$

trovare al primo ordine della teoria delle perturbazioni lo spostamento in energia dello stato fondamentale dovuto a $V$.

## Soluzione

**1)**

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\vec{r}^2}{2} + \gamma L_z = H_o + \gamma L_z$$

$$H_o = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\vec{r}^2}{2} \ ,$$

$$[H_o, L_z] = 0 \ .$$

Le autofunzioni sono del tipo

$$\psi_{n,l,l_z}(r, \theta, \phi) = R_{n,l}(r) Y_{l,l_z}(\theta, \phi) \ ,$$

e in notazione di Dirac

$$|\psi\rangle = |n, l, l_z\rangle \ .$$

Gli autovalori sono

$$E_{n,l_z} = \hbar\omega(n + \frac{3}{2}) + \gamma\hbar l_z \ .$$

La degenerazione è data dai possibili valori che può assumere $l$ dato il valore di $n$. Perciò

$$deg(E_{n,l_z}) = \begin{cases} n/2 + 1 & n \text{ pari} \\ (n+1)/2 & n \text{ dispari} \end{cases} \ .$$

Lo stato fondamentale è $|0,0,0\rangle$

$$\psi_{0,0,0}(r,\theta,\phi) = R_{0,0}(r)Y_{0,0}(\theta,\phi) \ , \qquad E_{0,0} = \frac{3}{2}\hbar\omega$$

e non ha degenerazione $deg(E_{0,0}) = 1$ .

Il primo stato eccitato è $|1,1,-1\rangle$

$$\psi_{1,1,-1}(r,\theta,\phi) = R_{1,1}(r)Y_{1,-1}(\theta,\phi) \ , \qquad E_{1,-1} = \frac{5}{2}\hbar\omega - \hbar\gamma \ .$$

e non ha degenerazione $deg(E_{1,-1}) = 1$ . Notiamo è la che la condizione $|\gamma| < \omega$ che permette di dire che $E_{1,-1} > E_{0,0}$.

Il secondo stato eccitato è $|1,1,0\rangle$

$$\psi_{1,1,0}(r,\theta,\phi) = R_{1,1}(r)Y_{1,0}(\theta,\phi) \ , \qquad E_{1,0} = \frac{5}{2}\hbar\omega \ .$$

e non ha degenerazione $deg(E_{1,0}) = 1$ .

**2)** Lo spostamento in energia dello stato fondamentale è dato da

$$E = E_{0,0} + V_{0,0} = \frac{3}{2}\hbar\omega + \langle 0,0,0|V|0,0,0\rangle = \frac{3}{2}\hbar\omega - \langle 0,0,0|\frac{\vec{p}^4}{8m^3c^2}|0,0,0\rangle \ ,$$

dove

$$\vec{p}^4 = p_x^4 + p_y^4 + p_z^4 + 2p_x^2p_y^2 + 2p_x^2p_z^2 + 2p_y^2p_z^2 \ ,$$
$$|0,0,0\rangle_{n,l,l_z} = |0\rangle_{n_x}|0\rangle_{n_y}|0\rangle_{n_z} \ ,$$

e chiaramente

$$\langle 0|\langle 0|\langle 0|p_x^4|0\rangle|0\rangle|0\rangle = \langle 0|\langle 0|\langle 0|p_y^4|0\rangle|0\rangle|0\rangle = \langle 0|\langle 0|\langle 0|p_z^4|0\rangle|0\rangle|0\rangle \ ,$$
$$\langle 0|\langle 0|\langle 0|p_x^2|0\rangle|0\rangle|0\rangle = \langle 0|\langle 0|\langle 0|p_y^2|0\rangle|0\rangle|0\rangle = \langle 0|\langle 0|\langle 0|p_z^2|0\rangle|0\rangle|0\rangle \ ,$$

perció

$$\langle 0|\langle 0|\langle 0|\vec{p}^4|0\rangle|0\rangle|0\rangle = \langle 0|\langle 0|\langle 0|(3p_x^4 + 6p_x^2p_y^2)|0\rangle|0\rangle|0\rangle = 3\Big(\frac{m\hbar\omega}{2}\Big)^2\langle 0|\langle 0|\langle 0|\Big[(a_x^\dagger - a_x)^4$$
$$+2(a_x^\dagger - a_x)^2(a_y^\dagger - a_y)^2\Big]|0\rangle|0\rangle|0\rangle \ ,$$

dove

$$a_x = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(ip_x + m\omega x) \ , \qquad a_x^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(-ip_x + m\omega x) \ ,$$
$$p_x = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(a_x^\dagger - a_x) \ , \quad p_x^2 = \frac{m\hbar\omega}{2}(a_x^\dagger - a_x)^2 \ , \quad p_x^4 = \Big(\frac{m\hbar\omega}{2}\Big)^2(a_x^\dagger - a_x)^4 \ ,$$

e analogamente per $a_y$ e $p_y$ .
Ricordiamo inoltre che

$$a_x^\dagger|n_x\rangle = \sqrt{n_x+1}|n_x+1\rangle \ , \qquad a_x|n_x\rangle = \sqrt{n_x}|n_x-1\rangle \ .$$

Perció

$$\begin{aligned}
&\langle 0|\langle 0|\langle 0|(a_x^\dagger - a_x)^4 + 2(a_x^\dagger - a_x)^2(a_y^\dagger - a_y)^2|0\rangle|0\rangle|0\rangle \\
&= \langle 0|\langle 0|\langle 0|(a_x^\dagger - a_x)^3 a_x^\dagger + 2(a_x^\dagger - a_x)^2(a_y^\dagger - a_y)a_y^\dagger|0\rangle|0\rangle|0\rangle \\
&= \langle 0|\langle 0|\langle 0|(a_x^\dagger - a_x)^2 a_x^\dagger a_x^\dagger - (a_x^\dagger - a_x)^2 a_x a_x^\dagger - 2(a_x^\dagger - a_x)^2 a_y a_y^\dagger|0\rangle|0\rangle|0\rangle \\
&= \langle 0|\langle 0|\langle 0| - (a_x^\dagger - a_x)a_x a_x^\dagger a_x^\dagger - (a_x^\dagger - a_x)a_x^\dagger - 2(a_x^\dagger - a_x)a_x^\dagger|0\rangle|0\rangle|0\rangle \\
&= \langle 0|\langle 0|\langle 0|a_x a_x a_x^\dagger a_x^\dagger + a_x a_x^\dagger + 2a_x a_x^\dagger|0\rangle|0\rangle|0\rangle \\
&= \langle 0|\langle 0|\langle 0|a_x a_x a_x^\dagger a_x^\dagger + 3a_x a_x^\dagger|0\rangle|0\rangle|0\rangle = 2 + 3 = 5 \ .
\end{aligned}$$

Quindi

$$E = E_{0,0} + V_{0,0} = \frac{3}{2}\hbar\omega - \frac{15(m\hbar\omega)^2}{32m^3c^2} = \frac{3}{2}\hbar\omega\Big(1 - \frac{5\hbar\omega}{16mc^2}\Big) \ .$$

# Esercizio 14

Sia data una particella vincolata in un segmento la cui Hamiltoniana è data da

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) \ , \qquad V(x) = \begin{cases} +\infty & x < -\frac{L}{2} \\ 0 & -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2} \\ +\infty & x > \frac{L}{2} \end{cases}$$

**1)** Determinare gli autostati e gli autovalori dell'Hamiltoniana;

**2)** Si aggiunga ora la perturbazione

$$\lambda \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \ ,$$

determinare lo spostamento di energia del livello fondamentale al second'ordine della teoria delle perturbazioni e la correzione al second'ordine del corrispondente autostato.

## Soluzione

**1)** L'equazione di Schrödinger è data da

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))\psi(x) = 0 \ .$$

All'esterno della buca la soluzione è

$$\psi(x) = 0 \qquad x < -\frac{L}{2} \ \cup \ x > \frac{L}{2} \ ,$$

all'interno della buca le soluzioni sono pari o dispari

$$\psi_p(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos(k_p x) \ , \quad \psi_d(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(k_d x) \ , \quad k_{p,d}^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \ , \quad -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2} \ ,$$

dove abbiamo imposto che

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |\psi(x)|^2 dx = 1 \ .$$

Imponendo la continuità delle soluzioni abbiamo che

$$\psi\left(-\frac{L}{2}\right) = \psi\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

perciò

$$k_p \frac{L}{2} = (2n-1)\frac{\pi}{2} \ , \qquad k_d \frac{L}{2} = n\pi \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Le autofunzioni del problema imperturbato sono quindi

$$\psi_n^{(0)}(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \begin{cases} \cos(\frac{n\pi x}{L}) & n \text{ dispari} \\ \sin(\frac{n\pi x}{L}) & n \text{ pari} \end{cases}$$

e i rispettivi autovalori

$$E_n^{(0)} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} n^2 \ , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

senza degenerazione: $deg(E_n) = 1$ .

**2)**

$$\lambda V(x) = \lambda \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \ , \quad -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}$$

lo stato fondamentale è

$$\psi_1^{(0)}(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \ ,$$

con energia

$$E_1^{(0)} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} \ .$$

La correzione in energia al second'ordine dello stato fondamentale è data da

$$E_1 = E_1^{(0)} + \lambda V_{11} + \lambda^2 \sum_{i \neq 1} \frac{|V_{i1}|^2}{E_1^{(0)} - E_i^{(0)}} + o(\lambda^2) \ ,$$

dove

$$V_{11} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^{(0)*}(x) V(x) \psi_1^{(0)}(x) dx = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{2}{L} \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = 0 \ ,$$

mentre

$$\begin{aligned} V_{i1} &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_i^{(0)*}(x) V(x) \psi_1^{(0)}(x) dx = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \psi_i^{(0)*}(x) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \psi_i^{(0)*}(x) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2} \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \psi_i^{(0)*}(x) \psi_2^{(0)}(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} \delta_{i,2} = \frac{1}{2} E_1^{(0)} \delta_{i,2} \ . \end{aligned}$$

Perciò

$$\begin{aligned} E_1 &= E_1^{(0)} + \lambda^2 \frac{|V_{21}|^2}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}} + o(\lambda^2) = E_1^{(0)} + \lambda^2 \frac{{E_1^{(0)}}^2}{4(-3E_1^{(0)})} + o(\lambda^2) \\ &= E_1^{(0)} \Big(1 - \frac{\lambda^2}{12}\Big) + o(\lambda^2) \ . \end{aligned}$$

La correzione al second'ordine dell'autostato corrispondente è data da

$$\psi_1(x) = \psi_1^{(0)}(x) + \lambda \sum_{i\neq 1} c_i^{(1)}\psi_i^{(0)} + \lambda^2 \sum_{i\neq 1} c_i^{(2)}\psi_i^{(0)} + o(\lambda^2) \ ,$$

dove

$$\begin{aligned}
c_i^{(1)} &= \frac{V_{i1}}{E_1^{(0)} - E_i^{(0)}} = -\frac{1}{6}\delta_{i,2} \ , \\
c_i^{(2)} &= \sum_{j\neq 1} \frac{V_{ij}V_{j1}}{(E_1^{(0)} - E_j^{(0)})(E_1^{(0)} - E_i^{(0)})} - \frac{V_{i1}V_{11}}{(E_1^{(0)} - E_i^{(0)})^2} \\
&= \sum_{j\neq 1} \frac{1}{6}\frac{-\delta_{j,2}V_{ij}}{(E_1^{(0)} - E_i^{(0)})} = \frac{1}{6}\frac{-V_{i2}}{(E_1^{(0)} - E_i^{(0)})} \ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{i2} &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_i^{(0)*}(x)V(x)\psi_2^{(0)}(x)dx = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \psi_i^{(0)*}(x)\sin\Big(\frac{\pi x}{L}\Big)\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\Big(\frac{2\pi x}{L}\Big)dx \\
&= \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \psi_i^{(0)*}(x)\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{L}}\Big[\cos\Big(\frac{\pi x}{L}\Big) - \cos\Big(\frac{3\pi x}{L}\Big)\Big]dx \\
&= \frac{1}{2}\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \psi_i^{(0)*}(x)\Big(\psi_1^{(0)}(x) - \psi_3^{(0)}(x)\Big)dx = \frac{1}{2}\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}(\delta_{i,1} - \delta_{i,3}) \\
&= \frac{1}{2}E_1^{(0)}(\delta_{i,1} - \delta_{i,3}) \ .
\end{aligned}$$

Perciò

$$\sum_{i\neq 1} c_i^{(2)}\psi_i^{(0)} = \sum_{i\neq 1}\frac{1}{12}\frac{E_1^{(0)}(\delta_{i,1} - \delta_{i,3})}{E_1^{(0)} - E_i^{(0)}}\psi_i^{(0)} = \frac{1}{12}\frac{-E_1^{(0)}}{E_1^{(0)} - E_3^{(0)}}\psi_3^{(0)} = \frac{1}{96}\psi_3^{(0)} \ ,$$

$$\psi_1(x) = \psi_1^{(0)}(x) - \frac{\lambda}{6}\psi_2^{(0)} + \frac{\lambda^2}{96}\psi_3^{(0)} + o(\lambda^2) \ .$$

# Esercizio 15

Sia data una particella di spin $\frac{1}{2}$ la cui Hamiltoniana è data da

$$H_0 = \frac{\epsilon}{\hbar^2}\Big(\frac{4}{3}\vec{L}^2 + 2\vec{L}\cdot\vec{S} + \hbar(L_z + S_z)\Big) \ .$$

**1)** Determinare gli autostati e gli autovalori di $H_0$;

**2)** Si consideri ora l'Hamiltoniana

$$H = H_0 + \lambda V \ , \qquad \text{dove} \qquad V = \epsilon\frac{z}{|\vec{r}|} \ ,$$

considerando $V$ come una perturbazione, $\lambda \ll 1$, si calcoli lo spostamento in energia dello stato fondamentale e del primo stato eccitato e la funzione d'onda del primo stato eccitato al prim'ordine della teoria delle perturbazioni.

## Soluzione

**1)**

$$2\vec{L}\cdot\vec{S} = \vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2$$

perciò

$$H_0 = \frac{\epsilon}{\hbar^2}\Big(\frac{1}{3}\vec{L}^2 + \vec{J}^2 - \vec{S}^2 + \hbar J_z\Big) \ ,$$

una base di autostati è quindi $|j, j_z, l, s\rangle$ , formata dagli autostati degli operatori $J^2$, $J_z$, $L^2$ e $S^2$ .

Gli autovalori sono

$$E_{j,j_z,l,s} = \epsilon\Big(\frac{1}{3}l(l+1) + j(j+1) - \frac{3}{4} + j_z\Big) \ .$$

Lo stato fondamentale è con il rispettivo autovalore è

$$|0\rangle = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\rangle \ , \qquad E_0 = -\frac{\epsilon}{2} \ ,$$

mentre il primo stato eccitato con il rispettivo autovalore è

$$|1\rangle = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\rangle \ , \qquad E_1 = \frac{\epsilon}{6} \ .$$

**2)**

$$V = \epsilon\frac{z}{|\vec{r}|} = \epsilon\frac{r\cos\theta}{r} = \epsilon\cos\theta \ .$$

Lo stato fondamentale espresso nella base $|l, l_z\rangle|s, s_z\rangle$ , degli autostati degli operatori $L^2$, $L_z$, $S^2$, $S_z$ è

$$|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\rangle = |0, 0\rangle|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \ .$$

Lo spostamento in energia dello stato fondamentale al prim'ordine è dato da

$$E = E_0 + \lambda V_{00} + o(\lambda^2) \ ,$$

dove

$$\begin{aligned} V_{00} &= \langle 0|V|0\rangle = \langle 0,0|\langle \frac{1}{2},-\frac{1}{2}|V|0,0\rangle|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \\ &= \langle \frac{1}{2},-\frac{1}{2}|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} Y^*_{0,0}\epsilon\cos\theta\, Y_{0,0}\, d\cos\theta\, d\varphi = 2\pi\frac{\epsilon}{4\pi}\int_{-1}^{1}\cos\theta d\cos\theta = 0 \ . \end{aligned}$$

Il primo stato eccitato espresso nella base $|l,l_z\rangle|s,s_z\rangle$ è

$$|\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(|1,0\rangle|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{2}|1,-1\rangle|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle\Big) \ .$$

Lo spostamento in energia del primo stato eccitato al prim'ordine è dato da

$$E = E_1 + \lambda V_{11} + o(\lambda^2) \ ,$$

dove

$$\begin{aligned} V_{11} &= \langle 1|V|1\rangle = \frac{\epsilon}{3}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} Y^*_{1,0}\cos\theta\, Y_{1,0}\, d\cos\theta\, d\varphi + \frac{2\epsilon}{3}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} Y^*_{1,-1}\cos\theta\, Y_{1,-1}\, d\cos\theta\, d\varphi \\ &= \frac{2\pi}{3}\frac{3\epsilon}{4\pi}\int_{-1}^{1}\cos^3\theta d\cos\theta + \frac{4\pi}{3}\frac{3\epsilon}{8\pi}\int_{-1}^{1}\cos\theta\sin^2\theta d\cos\theta = 0 \ . \end{aligned}$$

Infine la correzione al prim'ordine della funzione d'onda dello stato fondamentale è data da

$$\psi(x) = \psi_0(x) + \lambda\sum_{k\neq 0}\frac{V_{k0}}{E_0 - E_k}\psi_k + o(\lambda^2) \ ,$$

dove

$$\begin{aligned} V_{k0} &= \langle j,j_z,l,s|\epsilon\cos\theta|\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\rangle = \sum_{l_z,s_z} C^{ls}_{l_z s_z}\langle l,l_s|\langle s,s_z|\epsilon\cos\theta|0,0\rangle|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \\ &= \epsilon\sum_{l_z,s_z} C^{ls}_{l_z s_z}\langle s,s_z|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle\langle l,l_z|\cos\theta|0,0\rangle \\ &= \epsilon\sum_{l_z,s_z} C^{ls}_{l_z s_z}\delta_{s,\frac{1}{2}}\delta_{s_z,-\frac{1}{2}}2\pi\int_{-1}^{1} Y^*_{l,l_z}\cos\theta Y_{0,0} d\cos\theta \\ &= \epsilon\sum_{l_z,s_z} C^{ls}_{l_z s_z}\delta_{s,\frac{1}{2}}\delta_{s_z,-\frac{1}{2}}2\pi\int_{-1}^{1} Y^*_{l,l_z}\frac{1}{\sqrt{3}}Y_{1,0} d\cos\theta = \frac{\epsilon}{\sqrt{3}}\sum_{l_z,s_z} C^{ls}_{l_z s_z}\delta_{s,\frac{1}{2}}\delta_{s_z,-\frac{1}{2}}\delta_{l,1}\delta_{l_z,0} \ . \end{aligned}$$

Gli autostati della base $|j, j_z, l, s\rangle$ che contribuiscono alla correzione dell'autovalore sono gli stati in cui è non nullo il coefficiente di Clebsch-Gordan con lo stato con $l_z = 0$, e $s_z = -\frac{1}{2}$ , ovvero gli stati

$$
\begin{aligned}
|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}\Big\{|1,-1\rangle|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{2}|1,0\rangle|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle\Big\} \\
|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}\Big\{|1,0\rangle|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{2}|1,-1\rangle|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle\Big\} \ ,
\end{aligned}
$$

le energie di questi stati sono

$$
\begin{aligned}
E_{\frac{3}{2},-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}} &= \frac{19}{6}\epsilon \\
E_{\frac{3}{2},-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}} &= \frac{\epsilon}{6} \ .
\end{aligned}
$$

Perciò la correzione allo stato fondamentale espressa nella base degli autostati dell'Hamiltoniana imperturbata è data da

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\rangle &+ \lambda\frac{\sqrt{2}}{3}\frac{\epsilon}{-\frac{\epsilon}{2}-\frac{19\epsilon}{6}}|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\rangle + \lambda\frac{1}{3}\frac{\epsilon}{-\frac{\epsilon}{2}-\frac{\epsilon}{6}}|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\rangle + o(\lambda^2) \\
= |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\rangle &- \lambda\frac{2\sqrt{2}}{25}|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\rangle - \frac{\lambda}{2}|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\rangle + o(\lambda^2) \ .
\end{aligned}
$$

# Esercizio 16

In uno spazio unidimensionale è data l'Hamiltoniana di un sistema di due particelle identiche di spin 1/2

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{\mu\omega^2}{2}(r_1 - r_2)^2 \ , \qquad \mu = \frac{m}{2} \ .$$

**1)** Determinare gli autovalori e gli autostati dell'Hamiltoniana nel sistema del centro di massa.

**2)** Se si aggiunge all'Hamiltoniana il termine

$$V = \lambda(r_1 r_2)(\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2) \ ,$$

come vengono modificati gli autovalori dell'Hamiltoniana. Rispondere risolvendo il problema esattamente.

**3)** Considerando $V$ come una perturbazione ($\lambda \ll 1$) calcolare lo spostamento in energia dello stato fondamentale e per il primo stato eccitato al prim'ordine della teoria delle perturbazioni. Confrontare il risultato con il calcolo esatto.

**4)** Rispondere alla domanda del punto 1) nel caso in cui le particelle siano bosoni di spin 1.

## Soluzione

**1)** Introduciamo la coordinata del centro di massa e relativa e passiamo nel sistema di riferimento del centro di massa:

$$\begin{cases} R = (r_1 + r_2)/2 \\ r \ = r_1 - r_2 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} r_1 = R + r/2 \\ r_2 = R - r/2 \end{cases}$$

quindi

$$H = H_{cm} + H_r \ ,$$

$$H_{cm} = \frac{P^2}{2M} = 0 \ , \qquad H_r = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{\mu\omega^2}{2} r^2 \ ,$$

dove $P = M\dot{R}$ , $p = \mu\dot{r}$ , $M = m_1 + m_2$ .

Perciò

$$H = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{\mu\omega^2}{2} r^2 \ .$$

Gli autovalori sono quindi

$$E_n = \hbar\omega\Big(n + \frac{1}{2}\Big) \ ,$$

mentre le autofunzioni sono

$$\Psi_{n,s,s_z}(r) = \psi_n(r)\,\chi_{s,s_z} \ ,$$

dove $\psi_n(r)$ sono le autofunzioni dell'oscillatore armonico mentre $\chi_{s,s_z}$ è la parte spinoriale e può valere

$$\begin{array}{ll} \chi_{0,0} & \text{singoletto antisimmetrico} \\ \chi_{1,s_z} & \text{tripletto simmetrico} \ . \end{array}$$

Le particelle sono fermioni identici di spin 1/2 perciò la funzione d'onda complessiva dev'essere antisimmetrica rispetto allo scambio delle particelle. Nel sistema di riferimento del centro di massa lo scambio di particelle equivale alla trasformazione

$$\begin{cases} R = (r_1 + r_2)/2 & \rightarrow \quad (r_2 + r_1)/2 = R \\ r \ = r_1 - r_2 & \rightarrow \quad r_2 - r_1 = -r \end{cases}$$

quindi

$$\psi_n(r) \quad \rightarrow \quad \psi_n(-r) = \begin{cases} \ \ \psi_n(r) & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\psi_n(r) & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

perciò l'autofunzione complessiva antisimmetrica sarà

$$\Psi_{n,s,s_z}(r) = \begin{cases} \psi_n(r)\,\chi_{0,0} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \psi_n(r)\,\chi_{1,s_z} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \ .$$

**2)**

$$H = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{\mu\omega^2}{2} + \lambda(r_1 r_2)(\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2) \ .$$

Nel sistema del centro di massa $R = 0$ perciò

$$r_1 r_2 = (R + \frac{r}{2})(R - \frac{r}{2}) = R^2 - \frac{r^2}{4} = -\frac{r^2}{4} \ ,$$

$$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{1}{2}(\vec{S}^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2) = \frac{1}{2}(\vec{S}^2 - \frac{3}{2}\hbar^2) \ ,$$

quindi

$$H = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{\mu\omega^2}{2} r^2 - \lambda\frac{r^2}{8}\Big(\vec{S}^2 - \frac{3}{2}\hbar^2\Big) \ .$$

Per $n$ pari gli stati sono di singoletto perciò su questi stati

$$\vec{S}^2 = \hbar^2 s(s+1) = 0 \ ,$$

$$H = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{\mu\omega^2}{2} r^2 + \lambda \frac{3}{16} \hbar^2 r^2 = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{\mu\omega^2}{2}\Big(1 + \frac{3}{8}\frac{\lambda\hbar^2}{\mu\omega^2}\Big) r^2 = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{\mu\tilde{\omega_p}^2}{2} r^2 \ ,$$

$$\text{dove} \qquad \tilde{\omega_p} = \omega\sqrt{1 + \frac{3}{8}\frac{\lambda\hbar^2}{\mu\omega^2}} \ ,$$

$$E_n = \hbar\tilde{\omega_p}\Big(n + \frac{1}{2}\Big) = \hbar\omega\sqrt{1 + \frac{3}{8}\frac{\lambda\hbar^2}{\mu\omega^2}}\Big(n + \frac{1}{2}\Big) \ , \qquad n \text{ pari} \ .$$

Per $n$ dispari gli stati sono di tripletto perciò su questi stati

$$\vec{S}^2 = \hbar^2 s(s+1) = 2\hbar^2 \ ,$$

$$H = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{\mu\omega^2}{2} r^2 - \lambda \frac{1}{16} \hbar^2 r^2 = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{\mu\omega^2}{2}\Big(1 - \frac{1}{8}\frac{\lambda\hbar^2}{\mu\omega^2}\Big) r^2 = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{\mu\tilde{\omega_d}^2}{2} r^2 \ ,$$

$$\text{dove} \qquad \tilde{\omega_d} = \omega\sqrt{1 - \frac{1}{8}\frac{\lambda\hbar^2}{\mu\omega^2}} \ ,$$

$$E_n = \hbar\tilde{\omega_d}\Big(n + \frac{1}{2}\Big) = \hbar\omega\sqrt{1 - \frac{1}{8}\frac{\lambda\hbar^2}{\mu\omega^2}}\Big(n + \frac{1}{2}\Big) \ , \qquad n \text{ dispari} \ .$$

**3)**

$$V = (r_1 r_2)(\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2) = -\frac{r^2}{8}\Big(\vec{S}^2 - \frac{3}{2}\hbar^2\Big) \ ,$$

considerando $V$ come una perturbazione abbiamo che la correzione in energia al prim'ordine della teoria delle perturbazioni è data da

$$\lambda V_{nn} = -\frac{\lambda}{8}\langle s, s_z|\vec{S}^2 - \frac{3}{2}\hbar^2\rangle|s, s_z\rangle\langle n|r^2|n\rangle \ ,$$

dove

$$\langle n|r^2|n\rangle = \langle n|\frac{\hbar}{2\mu\omega}(a + a^\dagger)^2|n\rangle = \frac{\hbar}{2\mu\omega}\langle n|a^2 + aa^\dagger + a^\dagger a + {a^\dagger}^2|n\rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2\mu\omega}(n + n + 1) = \frac{\hbar}{\mu\omega}\Big(n + \frac{1}{2}\Big) \ ,$$

$$\langle s, s_z|\vec{S}^2 - \frac{3}{2}\hbar^2\rangle|s, s_z\rangle = \begin{cases} \langle 0,0|\vec{S}^2 - 3\hbar^2/2\rangle|0,0\rangle = -3\hbar^2/2 & \text{per } n \text{ pari} \\ \langle 1, s_z|(\vec{S}^2 - 3\hbar^2/2\rangle|1, s_z\rangle = \hbar^2/2 & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases} .$$

Perciò

$$V_{nn} = \frac{3\hbar^3}{16\mu\omega}\Big(n + \frac{1}{2}\Big) \ , \quad E_n = \hbar\omega\Big(n + \frac{1}{2}\Big) + \lambda\frac{3\hbar^3}{16\mu\omega}\Big(n + \frac{1}{2}\Big) + o(\lambda) \quad n \text{ pari} \ ,$$

$$V_{nn} = -\frac{\hbar^3}{16\mu\omega}\Big(n + \frac{1}{2}\Big) \ , \quad E_n = \hbar\omega\Big(n + \frac{1}{2}\Big) - \lambda\frac{\hbar^3}{16\mu\omega}\Big(n + \frac{1}{2}\Big) + o(\lambda) \quad n \text{ dispari} \ .$$

Il risulato coincide con il calcolo esatto al prim'ordine in $\lambda$ infatti,

$$E_n = \hbar\omega\sqrt{1+\frac{3}{8}\frac{\lambda\hbar^2}{\mu\omega^2}}\Big(n+\frac{1}{2}\Big) = \hbar\omega\Big(1+\frac{3}{16}\frac{\lambda\hbar^2}{\mu\omega^2}\Big)\Big(n+\frac{1}{2}\Big)+o(\lambda) \quad n \text{ pari },$$

$$E_n = \hbar\omega\sqrt{1-\frac{1}{8}\frac{\lambda\hbar^2}{\mu\omega^2}}\Big(n+\frac{1}{2}\Big) = \hbar\omega(1-\frac{1}{16}\frac{\lambda\hbar^2}{\mu\omega^2})\Big(n+\frac{1}{2}\Big)+o(\lambda) \quad n \text{ dispari }.$$

**4)** Nel caso in cui le due particelle sono bosoni di spin 1 le autofunzioni devono essere simmetriche per scambio delle particelle. Abbiamo che

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 = \begin{cases} 2 \\ 1 \\ 0 \end{cases}$$

Scriviamo i possibili stati dello spin totale $|s, s_z\rangle$ in funzione della base $|s_1, s_{1z}\rangle_1 |s_2, s_{2z}\rangle_2$

$$\begin{aligned}
|2,2,1,1\rangle &= |1,1\rangle_1|1,1\rangle_2 \\
|2,1,1,1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{|1,0\rangle_1|1,1\rangle_2 + |1,1\rangle_1|1,0\rangle_2\Big\} \\
|2,0,1,1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}\Big\{|1,1\rangle_1|1,-1\rangle_2 + 2|1,0\rangle_1|1,0\rangle_2 + |1,-1\rangle_1|1,1\rangle_2\Big\} \\
|2,-1,1,1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{|1,-1\rangle_1|1,0\rangle_2 + |1,0\rangle_1|1,-1\rangle_2\Big\} \\
|2,-2,1,1\rangle &= |1,-1\rangle_1|1,-1\rangle_2 \\
|1,1,1,1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{|1,1\rangle_1|1,0\rangle_2 - |1,0\rangle_1|1,1\rangle_2\Big\} \\
|1,0,1,1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{|1,1\rangle_1|1,-1\rangle_2 - |1,-1\rangle_1|1,1\rangle_2\Big\} \\
|1,-1,1,1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{|1,0\rangle_1|1,-1\rangle_2 - |1,-1\rangle_1|1,0\rangle_2\Big\} \\
|0,0,1,1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}\Big\{|1,1\rangle_1|1,-1\rangle_2 - |1,0\rangle_1|1,0\rangle_2 + |1,-1\rangle_1|1,1\rangle_2\Big\} ,
\end{aligned}$$

perciò gli stati sono simmetrici per scambio di particelle se $s$ è pari ($s = 2, 0$), antisimmetrici se $s$ è dispari ($s = 1$).

Le autofunzioni complessive simmetriche per il sistema sono quindi

$$|\Psi_{n,s,s_z}(r)\rangle = \begin{cases} |\psi_n(r)\rangle\,|s,s_z\rangle & \text{per } s \text{ e } n \text{ pari,} \\ |\psi_n(r)\rangle\,|s,s_z\rangle & \text{per } s \text{ e } n \text{ dispari,} \end{cases} ,$$

mentre gli autovalori rimangono immutati rispetto al caso dei fermioni

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) .$$

# Esercizio 17

Siano date due particelle identiche con Hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m} + \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m} - \frac{g^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \ .$$

**1)** Determinare gli autovalori dell'Hamiltoniana nel caso in cui le due particelle siano due bosoni di spin 0 .

**2)** Determinare gli autovalori dell'Hamiltoniana nel caso in cui le due particelle siano due fermioni di spin 1/2 .

**3)** Scrivere le possibili funzioni d'onda per il livello di energia più basso ed il primo stato eccitato, nel caso che le particelle siano due fermioni di spin 1/2, e discutere le relative degenerazioni.

**4)** Data la perturbazione

$$V = \mathcal{K}\, |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|\, \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \ ,$$

calcolare lo spostamento in energia dello stato fondamentale. Si ricorda che la funzione d'onda radiale nello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno é data da

$$R_{10}(r) = \frac{2}{r_0^{3/2}} e^{-r/r_0} \ .$$

## Soluzione

**1)** Introduciamo la coordinata del centro di massa e relativa e passiamo nel sistema di riferimento del centro di massa:

$$\begin{cases} \vec{R} = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)/2 \\ \vec{r} \ = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{R} + \vec{r}/2 \\ \vec{r}_2 = \vec{R} - \vec{r}/2 \end{cases}$$

quindi

$$H = H_{cm} + H_r \ ,$$

$$H_{cm} = \frac{\vec{P}^{\,2}}{2M} = 0 \ , \qquad H_r = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2\mu} - \frac{g^2}{|\vec{r}|} \ ,$$

dove $\vec{P} = M\, \dot{\vec{R}}$ , $\quad \vec{p} = \mu\, \dot{\vec{r}}$ , $\quad M = m_1 + m_2$ .

Perciò

$$H = \frac{p^2}{2\mu} - \frac{g^2}{|\vec{r}\,|} \ .$$

Le autofunzioni saranno quindi del tipo

$$\Psi_{n,l,l_z,s,s_z}(\vec{r}\,) = \psi_{n,l,l_z}(\vec{r}\,)\,\chi_{s,s_z} \ ,$$

dove $\psi_{n,l,l_z}(\vec{r})$ sono le autofunzioni dell'atomo di idrogeno mentre $\chi_{s,s_z}$ è la parte spinoriale.

Nel sistema di riferimento del centro di massa lo scambio di particelle equivale alla trasformazione

$$\begin{cases} \vec{R} = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)/2 & \rightarrow \quad (\vec{r}_2 + \vec{r}_1)/2 = \vec{R} \\ \vec{r} \ = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 & \rightarrow \quad \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = -\vec{r} \end{cases}$$

quindi

$$\psi_{n,l,l_z}(\vec{r}\,) \quad \rightarrow \quad \psi_{n,l,l_z}(-\vec{r}\,) = \begin{cases} \ \ \psi_{n,l,l_z}(\vec{r}\,) & \text{se } l \text{ è pari} \\ -\psi_{n,l,l_z}(\vec{r}\,) & \text{se } l \text{ è dispari} \end{cases}$$

Nel caso in cui le due particelle sono bosoni di spin 0 la parte spinoriale della funzione d'onda $|s, s_z\rangle$ espressa in funzione degli spin delle singole particelle $|s_1, s_{1z}\rangle_1 |s_2, s_{2z}\rangle_2$ sarà data da

$$|0,0\rangle = |0,0\rangle_1 |0,0\rangle_2 \ ,$$

ed è chiaramente simmetrica rispetto allo scambio delle particelle.

Poichè la funzione d'onda complessiva dev'essere simmetrica rispetto allo scambio delle particelle le autofunzioni saranno

$$|\Psi_{n,l,l_z,s,s_z}(\vec{r})\rangle = |\psi_{n,l,l_z}(\vec{r})\rangle\, |0,0\rangle \ , \qquad \text{con } l \text{ pari} \ ,$$

e siccome per le autofunzioni dell'atomo di idrogeno abbiamo che

$$l = n-1, n-2, \ldots 0$$

gli autovalori saranno

$$E_n = -\frac{g^2}{2r_0 n^2} \ , \qquad n \geq 1 \ .$$

**2)** Nel caso in cui le due particelle sono fermioni di spin 1/2 la parte spinoriale della funzione d'onda $|s, s_z\rangle$ espressa in funzione degli spin delle singole particelle $|s_1, s_{1z}\rangle_1 |s_2, s_{2z}\rangle_2$ sarà data dal tripletto simmetrico o dal singoletto antisimmetrico:

$$|1, s_z\rangle = \begin{cases} |1,1\rangle = |1/2,1/2\rangle_1 |1/2,1/2\rangle_2 \\ |1,0\rangle = \Big\{ |1/2,1/2\rangle_1 |1/2,-1/2\rangle_2 + |1/2,-1/2\rangle_1 |1/2,1/2\rangle_2 \Big\} / \sqrt{2} \\ |1,-1\rangle = |1/2,-1/2\rangle_1 |1/2,-1/2\rangle_2 \end{cases}$$

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big\{ |1/2,1/2\rangle_1 |1/2,-1/2\rangle_2 - |1/2,-1/2\rangle_1 |1/2,1/2\rangle_2 \Big\}$$

Poichè la funzione d'onda complessiva dev'essere antisimmetrica rispetto allo scambio delle particelle le autofunzioni saranno

$$|\Psi_{n,l,l_z,s,s_z}(\vec{r})\rangle = \begin{cases} |\psi_{n,l,l_z}(\vec{r})\rangle\, |0,0\rangle \ , & \text{se } l \text{ è pari} \\ |\psi_{n,l,l_z}(\vec{r})\rangle\, |1,s_z\rangle \ , & \text{se } l \text{ è dispari} \end{cases} ,$$

mentre gli autovalori saranno

$$E_n = -\frac{g^2}{2r_0 n^2} \ , \qquad n \geq 1 \ .$$

**3)** Nel caso in cui le particelle sono fermioni di spin 1/2 la funzione d'onda del livello fondamentale è data da

$$|\Psi_{1,0,0,0,0}(\vec{r})\rangle = |\psi_{1,0,0}(\vec{r})\rangle\, |0,0\rangle \ ,$$

il rispettivo autovalore è

$$E_1 = -\frac{g^2}{2r_0} \ ,$$

con degenerazione nulla

$$deg(E_1) = 1 \ .$$

per il primo livello eccitato abbiamo invece che

$$|\Psi_{2,l,l_z,s,s_z}(\vec{r})\rangle = \begin{cases} |\psi_{2,1,l_z}(\vec{r})\rangle\, |1,s_z\rangle \\ |\psi_{2,0,0}(\vec{r})\rangle\, |0,0\rangle \ , \end{cases}$$

il rispettivo autovalore è

$$E_2 = -\frac{g^2}{8r_0} \ ,$$

con degenerazione

$$deg(E_2) = 3 \times 3 + 1 = 10 \ .$$

**4)**

$$V = \mathcal{K}\, |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|\, \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \mathcal{K}\frac{|\vec{r}|}{2}\, (\vec{S}^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2) \ ,$$

$$V_{00} = \frac{\mathcal{K}}{2}\langle 0,0|\vec{S}^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2|0,0\rangle\langle\psi_{1,0,0}(\vec{r})|(|\vec{r}|)|\psi_{1,0,0}(\vec{r})\rangle$$

dove

$$\langle 0,0|\vec{S}^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2|0,0\rangle = -\frac{3}{2}\hbar^2 \ ,$$

$$\langle\psi_{1,0,0}(\vec{r})|(|\vec{r}|)|\psi_{1,0,0}(\vec{r})\rangle = \int_0^\infty |R_{10}|^2|\vec{r}|r^2 dr \int |Y_{0,0}|^2 d\Omega = \frac{4}{r_0^3}\int_0^\infty e^{-2r/r_0} r^3 dr = \frac{3}{2}r_0 \ ,$$

dove l'ultimo integrale si risolve per parti .

Quindi

$$V_{00} = -\frac{9}{8}\mathcal{K}\hbar^2 r_0 \ .$$

# Esercizio 18

Si consideri un sistema unidimensionale la cui Hamiltoniana è data da

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 + \alpha(x - x_0) ,$$

**1)** Determinare esattamente gli autovalori e le autofuzioni dell'Hamiltoniana.

**2)** Considerando il termine $V = \alpha(x - x_0)$ come una perturbazione, calcolare, al primo ordine perturbativo, la funzione d'onda per lo stato fondamentale e al secondo ordine perturbativo il valore dell'energia corrispondente ai due stati imperturbati di energia più bassa.

**3)** Per i due stati imperturbati di energia più bassa, confrontare il risultato esatto con quello ottenuto al primo ordine perturbativo.

## Soluzione

**1)**

$$\begin{aligned}
H &= \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 + \alpha(x - x_0) \\
&= \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\Big(x^2 + \frac{2\alpha}{m\omega^2}x + \Big(\frac{\alpha}{m\omega^2}\Big)^2\Big) - \frac{\alpha^2}{2m\omega^2} - \alpha x_0 \\
&= \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}y^2 - \frac{\alpha^2}{2m\omega^2} - \alpha x_0 ,
\end{aligned}$$

dove

$$y = x + \frac{\alpha}{m\omega^2} , \qquad p = m\dot{x} = m\dot{y} .$$

Perciò gli autovalori sono

$$E_n = \hbar\omega\Big(n + \frac{1}{2}\Big) - \frac{\alpha^2}{2m\omega^2} - \alpha x_0 ,$$

mentre le autofunzioni sono quelle dell'oscillatore armonico unidemensionale

$$\psi_n(y) = \psi_n\Big(x + \frac{\alpha}{m\omega^2}\Big) ,$$

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\Big(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\Big)^{1/4} H_n(\sqrt{m\omega/\hbar}\, x)\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} ,$$

$$H_0(\xi) = 1 , \qquad H_1(\xi) = 2\xi , \quad H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2 , \quad \xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x .$$

**2)** La correzione al prim'ordine perturbativo della funzione d'onda dello stato fondamentale è data da

$$\psi_0(x) = \psi_0^{(0)}(x) + \sum_{i \neq 0} c_i^{(1)} \psi_i^{(0)}$$

dove

$$c_i^{(1)} = \frac{V_{i0}}{E_0^{(0)} - E_i^{(0)}},$$

$$V_{i0} = \langle i|\alpha(x - x_0)|0\rangle = \alpha\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle i|a + a^\dagger|0\rangle - \alpha x_0 \delta_{i0} = \alpha\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\delta_{i1} - \alpha x_0 \delta_{i0} \ ,$$

perciò

$$c_{i\neq 0}^{(1)} = -\frac{\alpha}{\hbar\omega}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} = -\frac{\alpha}{\sqrt{2m\hbar\omega^3}} \ ,$$

$$\psi_0(x) = \psi_0^{(0)}(x) - \frac{\alpha}{\sqrt{2m\hbar\omega^3}}\psi_1^{(0)} \ .$$

La correzione in energia al second'ordine dello stato fondamentale è data da

$$E_0 = E_0^{(0)} + V_{00} + \sum_{i\neq 0}\frac{|V_{i0}|^2}{E_0^{(0)} - E_i^{(0)}} \ ,$$

dove

$$V_{00} = \langle 0|\alpha(x - x_0)|0\rangle = \alpha\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle 0|a + a^\dagger|0\rangle - \alpha x_0 = -\alpha x_0 \ ,$$

perciò

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} - \alpha x_0 - \frac{\alpha^2}{2m\omega^2} \ ,$$

La correzione in energia al second'ordine del primo stato eccitato è data da

$$E_1 = E_1^{(0)} + V_{11} + \sum_{i\neq 1}\frac{|V_{i1}|^2}{E_1^{(0)} - E_i^{(0)}} \ ,$$

dove

$$V_{11} = \langle 1|\alpha(x - x_0)|1\rangle = \alpha\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle 1|a + a^\dagger|1\rangle - \alpha x_0 = -\alpha x_0 \ ,$$

$$\begin{aligned} V_{i1} &= \langle i|\alpha(x - x_0)|1\rangle = \alpha\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle i|a + a^\dagger|1\rangle - \alpha x_0\delta_{i1} \\ &= \alpha\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\delta_{i0} + \sqrt{2}\delta_{i2}) - \alpha x_0\delta_{i1} \ , \end{aligned}$$

perciò

$$E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega - \alpha x_0 + \frac{\alpha^2}{2m\omega^2}(1-2) = \frac{3}{2}\hbar\omega - \alpha x_0 - \frac{\alpha^2}{2m\omega^2} \ .$$

**3)** È immediato verificare che gli autovalori del risultato esatto coincidono con quelli corretti al second'ordine della teoria delle perturbazioni.

Per quanto riguarda la funzione d'onda sviluppiamo la soluzione esatta dello stato fondamentale al prim'ordine nel parametro $\alpha$ .

$$\begin{aligned}
\psi_0\Big(x + \frac{\alpha}{m\omega^2}\Big) &= \psi_0\Big(x + \frac{\alpha}{m\omega^2}\Big)\Big|_{\alpha=0} + \frac{\partial \psi_0(x + \frac{\alpha}{m\omega^2})}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} \alpha + o(\alpha) \\
&= \psi_0(x) + \Big(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\Big)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x+\frac{\alpha}{m\omega^2})^2}\Big( - \frac{1}{\hbar\omega}(x + \frac{\alpha}{m\omega^2})\Big)\Big|_{\alpha=0} \alpha + o(\alpha) \\
&= \psi_0(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\Big)^{1/4} 2\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\Big( - \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\frac{1}{\hbar\omega}\Big)\alpha + o(\alpha) \\
&= \psi_0(x) - \frac{\alpha}{\sqrt{2m\hbar\omega^3}}\psi_1(x) + o(\alpha) \ ,
\end{aligned}$$

il risultato coincide con quello ottenuto in teoria delle perturbazioni.

# Esercizio 19

Un sistema composto di due particelle identiche, è descritto dall'Hamiltoniana:

$$H_0 = \alpha \left( \vec{L}^2 + \frac{\vec{J}^2}{2} + \frac{\hbar J_z}{2} \right) \ , \qquad \alpha > 0$$

dove $\vec{L}$ è il momento angolare orbitale del sistema e $\vec{J}$ il momento angolare totale.

**1)** Determinare lo stato fondamentale e i primi due livelli eccitati nel caso che le particelle siano bosoni di spin 0 .

**2)** Determinare lo stato fondamentale e i primi due livelli eccitati nel caso che le particelle siano fermioni di spin 1/2 .

**3)** Determinare lo stato fondamentale e i primi due livelli eccitati nel caso che le particelle siano bosoni di spin 1 .

**4)** Se si aggiunge ad $H_0$ un termine di interazione

$$V = \epsilon\, \alpha \vec{L} \cdot \vec{S} \ , \qquad \epsilon \ll 1$$

dove $\vec{S}$ è lo spin totale del sistema, ricalcolare i livelli di energia richiesti al punto 3) .

**5)** Nel caso dei bosoni di spin 1, calcolare lo spostamento dei livelli al primo ordine in $\epsilon$ considerando $V$ come una perturbazione e confrontare i risultati con il punto 4) .

# Soluzione

Gli autovalori dell'Hamiltoniana sono:

$$E_{j,j_z,l} = \alpha\hbar^2 \Big( l(l+1) + \frac{j(j+1)}{2} + \frac{j_z}{2} \Big) \ .$$

Una base di autostati dell'Hamiltoniana sarà quindi data da

$$|j, j_z, l, s\rangle \ .$$

A seconda che le particelle siano bosoni o fermioni la funzione d'onda complessiva dev'essere simmetrica o antisimmetrica per scambio di particelle, scriviamo quindi la base degli autostati dell'Hamiltoniana in funzione della base $|l, l_z\rangle|s, s_z\rangle$ e imponiamo la giusta simmetria.

$$|j, j_z, l, s\rangle = |l, l_z\rangle|s, s_z\rangle \ .$$

Per quanto riguarda la parte orbitale, nel sistema del centro di massa lo scambio delle particelle equivale all'operazione di parità, perciò la parte orbitale della funzione d'onda è simmetrica per scambio di particelle se $l$ pari, antisimmetrica se dispari.

$$|l, l_z\rangle \xrightarrow{1\leftrightarrow 2} (-1)^l |l, l_z\rangle \ .$$

**1)** Nel caso in cui le due particelle siano due bosoni identici di spin 0 la parte spinoriale della funzione d'onda totale $|s, s_z\rangle$ in funzione della base $|s_1, s_{1z}\rangle_1 |s_2, s_{2z}\rangle_2$ è data da

$$|0, 0\rangle_{s,s_z} = |0, 0\rangle_1 |0, 0\rangle_2$$

ed è chiaramente simmetrica per scambio di particelle.

Affinché la funzione d'onda complessiva sia anch'essa simmetrica dobbiamo imporre che anche la parte orbitale della funzione d'onda sia simmetrica per scambio di particelle quindi $l$ dev'essere pari.

Lo stato fondamentale è dato da

$$|0, 0\rangle_{l,l_z} |0, 0\rangle_{s,s_z} = |0, 0, 0, 0\rangle_{j,j_z,l,s} \ ,$$

con autovalore

$$E_{0,0,0} = 0 \ .$$

Il primo stato eccitato è dato da

$$|2, -2\rangle_{l,l_z} |0, 0\rangle_{s,s_z} = |2, -2, 2, 0\rangle_{j,j_z,l,s} \ ,$$

con autovalore

$$E_{2,-2,2} = 8\alpha\hbar \ .$$

Il secondo stato eccitato è dato da

$$|2, -1\rangle_{l,l_z} |0, 0\rangle_{s,s_z} = |2, -1, 2, 0\rangle_{j,j_z,l,s} \ ,$$

$$|2, -1, 2, 0\rangle_{j,j_z,l,s} \ ,$$

con autovalore

$$E_{2,-1,2} = \frac{17}{2}\alpha\hbar \ .$$

**2)** Nel caso in cui le due particelle siano due fermioni identici di spin 1/2 la parte spinoriale della funzione d'onda totale $|s, s_z\rangle$ in funzione della base $|s_1, s_{1z}\rangle_1 |s_2, s_{2z}\rangle_2$ è data da

$$|s, s_z\rangle = \begin{cases} |0, 0\rangle_{s,s_z} & \text{singoletto antisimmetrico} \\ |1, s_z\rangle_{s,s_z} & \text{tripletto simmetrico} \end{cases} \ .$$

Affinché la funzione d'onda complessiva sia antisimmetrica per scambio di particelle dobbiamo associare la parte orbitale della funzione d'onda con $l$ pari al singoletto di spin e la la parte orbitale con $l$ dispari al tripletto di spin.

Lo stato fondamentale è dato da

$$|0, 0\rangle_{l,l_z} |0, 0\rangle_{s,s_z} = |0, 0, 0, 0\rangle_{j,j_z,l,s} \ ,$$

con autovalore

$$E_{0,0,0} = 0 \ .$$

Per gli stati eccitati dobbiamo considerare gli stati

$$|1, l_z\rangle_{l,l_z}|1, s_z\rangle_{s,s_z} = \begin{cases} |2, j_z, 1, 1\rangle_{j,j_z,l,s} \\ |1, j_z, 1, 1\rangle_{j,j_z,l,s} \\ |0, 0, 1, 1\rangle_{j,j_z,l,s} \end{cases} ,$$

il primo stato eccitato è quindi

$$|0, 0, 1, 1\rangle_{j,j_z,l,s} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big\{|1, 1\rangle_{l,l_z}|1, -1\rangle_{s,s_z} - |1, 0\rangle_{l,l_z}|1, 0\rangle_{s,s_z} + |1, -1\rangle_{l,l_z}|1, 1\rangle_{s,s_z}\Big\},$$

con autovalore

$$E_{0,0,1} = 2\alpha\hbar \ ,$$

mentre il secondo stato eccitato è dato da

$$|1, -1, 1, 1\rangle_{j,j_z,l,s} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{|1, 0\rangle_{l,l_z}|1, -1\rangle_{s,s_z} - |1, -1\rangle_{l,l_z}|1, 0\rangle_{s,s_z}\Big\},$$

con autovalore

$$E_{1,-1,1} = \frac{5}{2}\alpha\hbar \ .$$

**2)** Nel caso in cui le due particelle siano due bosoni identici di spin 1 la parte spinoriale della funzione d'onda totale $|s, s_z\rangle$ in funzione della base $|s_1, s_{1z}\rangle_1|s_2, s_{2z}\rangle_2$ è data da

$$|s, s_z\rangle = \begin{cases} |2, s_z\rangle_{s,s_z} & \text{pentapletto simmetrico} \\ |1, s_z\rangle_{s,s_z} & \text{tripletto antisimmetrico} \\ |0, 0\rangle_{s,s_z} & \text{singoletto simmetrico} \end{cases} .$$

Affinché la funzione d'onda complessiva sia simmetrica per scambio di particelle dobbiamo associare la parte orbitale della funzione d'onda con $l$ pari al singoletto o al pentapletto di spin e la la parte orbitale con $l$ dispari al tripletto di spin.

Lo stato fondamentale è dato da

$$|0, 0\rangle_{l,l_z}|0, 0\rangle_{s,s_z} = |0, 0, 0, 0\rangle_{j,j_z,l,s} \ ,$$

con autovalore

$$E_{0,0,0} = 0 \ .$$

Per gli stati eccitati dobbiamo considerare gli stati

$$|0, 0\rangle_{l,l_z}|2, s_z\rangle_{s,s_z} = |2, j_z, 0, 2\rangle_{j,j_z,l,s} \ ,$$

e gli stati

$$|1, l_z\rangle_{l,l_z}|1, s_z\rangle_{s,s_z} = \begin{cases} |2, j_z, 1, 1\rangle_{j,j_z,l,s} \\ |1, j_z, 1, 1\rangle_{j,j_z,l,s} \\ |0, 0, 1, 1\rangle_{j,j_z,l,s} \end{cases} ,$$

Per il primo stato eccitato abbiamo i seguenti stati degeneri

$$|0,0,1,1\rangle_{j,j_z,l,s} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big\{|1,1\rangle_{l,l_z}|1,-1\rangle_{s,s_z} - |1,0\rangle_{l,l_z}|1,0\rangle_{s,s_z} + |1,-1\rangle_{l,l_z}|1,1\rangle_{s,s_z}\Big\},$$

$$|2,-2,0,2\rangle_{j,j_z,l,s} = |0,0\rangle_{l,l_z}|2,-2\rangle_{s,s_z},$$

con autovalore

$$E_{0,0,1} = E_{2,-2,0} = 2\alpha\hbar \ ,$$

con degenerazione 2.

Per il secondo stato eccitato abbiamo i seguenti stati degeneri

$$|1,-1,1,1\rangle_{j,j_z,l,s} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{|1,0\rangle_{l,l_z}|1,-1\rangle_{s,s_z} - |1,-1\rangle_{l,l_z}|1,0\rangle_{s,s_z}\Big\},$$

$$|2,-1,0,2\rangle_{j,j_z,l,s} = |0,0\rangle_{l,l_z}|2,-1\rangle_{s,s_z},$$

con autovalore

$$E_{1,-1,1} = E_{2,-1,0} = \frac{5}{2}\alpha\hbar \ ,$$

con degenerazione 2.

**4)** Se aggiungiamo all'Hamiltoniana il termine

$$V = \epsilon\alpha\vec{L}\cdot\vec{S}$$

abbiamo che

$$\vec{L}\cdot\vec{S} = \frac{1}{2}\Big(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2\Big) \ ,$$

$$H = \alpha\left(\Big(1-\frac{\epsilon}{2}\Big)\vec{L}^2 + (1+\epsilon)\frac{\vec{J}^2}{2} + \frac{\hbar J_z}{2} - \frac{\epsilon}{2}\vec{S}^2\right) \ , \qquad (1)$$

$$E_{j,j_z,l,s} = \alpha\hbar^2\Big((1-\frac{\epsilon}{2})l(l+1) + (1+\epsilon)\frac{j(j+1)}{2} + \frac{j_z}{2} - \frac{\epsilon}{2}s(s+1)\Big) \ .$$

I livelli di energia calcolati nel punto 3) saranno ora:

$$|0,0,0,0\rangle_{j,j_z,l,s} \ , \qquad E_{0,0,0,0} = 0 \ ,$$

$$|0,0,1,1\rangle_{j,j_z,l,s} \ , \qquad E_{0,0,1,1} = 2\alpha\hbar^2(1-\epsilon) \ ,$$

$$|2,-2,0,2\rangle_{j,j_z,l,s} \ , \qquad E_{2,-2,0,2} = 2\alpha\hbar^2 \ ,$$

$$|1,-1,1,1\rangle_{j,j_z,l,s} \ , \qquad E_{1,-1,1,1} = \frac{5}{2}\alpha\hbar^2(1-\frac{2}{5}\epsilon) \ ,$$

$$|2,-1,0,2\rangle_{j,j_z,l,s} \ , \qquad E_{2,-1,0,2} = \frac{5}{2}\alpha\hbar^2 \ ,$$

la perturbazione perciò rimuove la degenerazione .

**5)** Per calcolare la correzione in energia in teoria delle perturbazioni dobbiamo calcolare il valore di aspettazione di $V$ fra gli stati trovati nel punto 3) tenendo conto del fatto che i primi due livelli eccitati sono degeneri con degenerazione 2 .

$$V = \frac{\epsilon\alpha}{2}\left(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2\right) ,$$

la perturbazione è diagonale nella base $|j, j_z, l, s\rangle$ degli autostati dell'Hamiltoniana, perciò nei sottospazi degeneri gli elementi di matrice di $V$ fuori della diagonale sono nulli, le correzioni agli autovalori saranno date dai valore di aspettazione di $V$ calcolato su ogni stato del punto 3).

$$\begin{aligned}
\langle 0,0,0,0|V|0,0,0,0\rangle &= 0 \\
\langle 0,0,1,1|V|0,0,1,1\rangle &= -2\epsilon\alpha\hbar^2 \\
\langle 2,-2,1,1|V|2,-2,1,1\rangle &= 0 \\
\langle 1,-1,1,1|V|1,-1,1,1\rangle &= -\epsilon\alpha\hbar^2 \\
\langle 2,-1,1,1|V|2,-1,1,1\rangle &= 0 \ .
\end{aligned}$$

Si verifica immediatamente che le correzioni trovate coincidono con quelle calcolate nel punto 4) .

# Esercizio 20

Sia dato un sistema di due bosoni identici di spin 0 e massa $m$ in uno spazio unidimensionale la cui Hamiltoniana ha la forma

$$H = H_0 + \lambda V \ ,$$

dove

$$H_0 = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x_1^2 + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x_2^2 \ , \qquad V = m\omega^2 x_1 x_2 \ .$$

**1)** Determinare gli autovalori e i corrispondenti autoket del livello fondamentale e dei primi due livelli eccitati del problema imperturbato e le correzioni in energia al prim'ordine della teoria delle perturbazioni. Discutere le degenerazioni in assenza e in presenza della perturbazione.

**2)** Rispondere al punto 1) nel caso in cui le particelle siano fermioni di spin 1/2 .

**3)** Risolvere esattamente il problema, nel caso di bosoni di spin 0 e di fermioni di spin 1/2, facendo un'opportuna trasformazione delle coordinate e confrontare il risultato con quello ottenuto con la teoria delle perturbazioni.

# Soluzione

**1)** Gli autovalori e gli autoket del problema imperturbato sono

$$E^{(0)}_{n_1,n_2} = \hbar\omega\Big(n_1 + n_2 + 1\Big) \ , \qquad |n_1, n_2, s, s_z\rangle = |n_1\rangle|n_2\rangle|0,0\rangle_{s,s_z}$$

dove $|n\rangle$ è l'autoket di un oscillatore armonico unidimensionale e $|s, s_z\rangle$ è la parte spinoriale della funzione d'onda.

$$\langle x|n\rangle = \psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\Big(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\Big)^{1/4} H_n(\sqrt{m\omega/\hbar}\, x)\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \ ,$$

$$|s, s_z\rangle = |0,0\rangle_{s_1,s_{1z}}|0,0\rangle_{s_2,s_{2z}} \ .$$

La parte spinoriale della funzione d'onda è chiaramente simmetrica per lo scambio delle particelle, affinchè la funzione d'onda complessiva del sistema sia simmetrica per scambio di particelle la parte spaziale della funzione d'onda dev'essere simmetrica rispetto allo scambio dei due bosoni.

L'autoket, l'autovalore e la degenerazione dello stato fondamentale sono

$$|0\rangle = |0\rangle|0\rangle|0,0\rangle_{s,s_z} \ , \qquad E^{(0)}_0 = \hbar\omega \ , \qquad g = 1 \ .$$

La correzione al prim'ordine della teoria delle perturbazioni è data da

$$\langle 0|V|0\rangle = m\omega^2\langle 0|\langle 0|x_1 x_2|0\rangle|0\rangle = m\omega^2\frac{\hbar}{2m\omega}\langle 0|\langle 0|(a_1 + a_1^\dagger)(a_2 + a_2^\dagger)|0\rangle|0\rangle = 0 \ .$$

L'autoket, l'autovalore e la degenerazione del primo stato eccitato sono

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{|1\rangle|0\rangle + |0\rangle|1\rangle\Big\}|0,0\rangle_{s,s_z}\ , \qquad E_1^{(0)} = 2\hbar\omega\ , \qquad g = 1\ .$$

La correzione al prim'ordine della teoria delle perturbazioni è data da

$$\langle 1|V|1\rangle = \frac{\hbar\omega}{4}\Big\{\langle 1|\langle 0| + \langle 0|\langle 1|\Big\}(a_1 + a_1^\dagger)(a_2 + a_2^\dagger)\Big\{|1\rangle|0\rangle + |0\rangle|1\rangle\Big\} = \frac{\hbar\omega}{2}\ ,$$

$$E_1 = E_1^{(0)} + \lambda\frac{\hbar\omega}{2} = \hbar\omega\Big(2 + \frac{\lambda}{2}\Big)\ .$$

Gli autoket, l'autovalore e la degenerazione del secondo stato eccitato sono

$$|2_{\rm I}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{|2\rangle|0\rangle + |0\rangle|2\rangle\Big\}|0,0\rangle_{s,s_z}\ , \quad |2_{\rm II}\rangle = |1\rangle|1\rangle|0,0\rangle_{s,s_z}\ ,$$

$$E_2^{(0)} = 3\hbar\omega\ , \qquad g = 2\ .$$

La correzione al prim'ordine della teoria delle perturbazioni è data da

$$\begin{aligned}
\langle 2_{\rm I}|V|2_{\rm I}\rangle &= \frac{\hbar\omega}{4}\Big\{\langle 2|\langle 0| + \langle 0|\langle 2|\Big\}(a_1 + a_1^\dagger)(a_2 + a_2^\dagger)\Big\{|2\rangle|0\rangle + |0\rangle|2\rangle\Big\} = 0\ ,\\
\langle 2_{\rm II}|V|2_{\rm II}\rangle &= \frac{\hbar\omega}{2}\langle 1|\langle 1|(a_1 + a_1^\dagger)(a_2 + a_2^\dagger)|1\rangle|1\rangle = 0\ ,\\
\langle 2_{\rm I}|V|2_{\rm II}\rangle &= \frac{\hbar\omega}{2\sqrt{2}}\Big\{\langle 2|\langle 0| + \langle 0|\langle 2|\Big\}(a_1 + a_1^\dagger)(a_2 + a_2^\dagger)|1\rangle|1\rangle\\
&= \frac{\hbar\omega}{2\sqrt{2}}\Big\{\langle 2|\langle 0| + \langle 0|\langle 2|\Big\}\Big\{|0\rangle|0\rangle + \sqrt{2}|0\rangle|2\rangle + \sqrt{2}|2\rangle|0\rangle + 2|1\rangle|1\rangle\Big\} = \hbar\omega\ ,
\end{aligned}$$

perciò

$$V = \hbar\omega\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \qquad \lambda_\pm = \pm\hbar\omega\ , \qquad |\lambda_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{|2_{\rm I}\rangle + |2_{\rm II}\rangle\Big\}\ .$$

Gli autovalori corretti al prim'ordine, con i rispettivi autoket e degenerazioni sono

$$E_{2\pm} = E_2^{(0)} \pm \lambda\hbar\omega = \hbar\omega(3 \pm \lambda)\ ,$$

$$\begin{aligned}
|2_+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{|2_{\rm I}\rangle + |2_{\rm II}\rangle\Big\} = \frac{1}{2}\Big\{|2\rangle|0\rangle + |0\rangle|2\rangle + \sqrt{2}|1\rangle|1\rangle\Big\}|0,0\rangle_{s,s_z}\ , \quad g = 1\ ,\\
|2_-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{|2_{\rm I}\rangle - |2_{\rm II}\rangle\Big\} = \frac{1}{2}\Big\{|2\rangle|0\rangle + |0\rangle|2\rangle - \sqrt{2}|1\rangle|1\rangle\Big\}|0,0\rangle_{s,s_z}\ . \quad g = 1\ .
\end{aligned}$$

**2)** Nel caso in cui le particelle sono due fermioni identici la parte spinoriale della funzione d'onda è data da

$$|s, s_z\rangle = \begin{cases} |0,0\rangle_{s,s_z} & \text{singoletto antisimmetrico} \\ |1,s_z\rangle_{s,s_z} & \text{tripletto simmetrico} \end{cases}$$

Affinchè la funzione d'onda complessiva del sistema sia antisimmetrica per lo scambio dei fermioni bisogna associare la parte spaziale della funzione d'onda simmetrica al singoletto e quella antisimmetrica al tripletto.

L'autoket, l'autovalore e la degenerazione dello stato fondamentale sono

$$|0\rangle = |0\rangle|0\rangle|0,0\rangle_{s,s_z} \ , \qquad E_0^{(0)} = \hbar\omega \ , \qquad g = 1 \ .$$

La correzione al prim'ordine della teoria delle perturbazioni è data da

$$\langle 0|V|0\rangle = m\omega^2 \langle 0|\langle 0|x_1 x_2|0\rangle|0\rangle = m\omega^2 \frac{\hbar}{2m\omega} \langle 0|\langle 0|(a_1 + a_1^\dagger)(a_2 + a_2^\dagger)|0\rangle|0\rangle = 0 \ .$$

Gli autoket, l'autovalore e la degenerazione del primo stato eccitato sono

$$|1_{\rm I}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big\{ |1\rangle|0\rangle + |0\rangle|1\rangle \Big\} |0,0\rangle_{s,s_z} \ ,$$

$$|1_{\rm II}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big\{ |1\rangle|0\rangle - |0\rangle|1\rangle \Big\} |1,0\rangle_{s,s_z} \ ,$$

$$E_1^{(0)} = 2\hbar\omega \ , \qquad g = 4 \ .$$

La correzione al prim'ordine della teoria delle perturbazioni è data da

$$\langle 1_{\rm I}|V|1_{\rm I}\rangle = \frac{\hbar\omega}{4} \Big\{ \langle 1|\langle 0| + \langle 0|\langle 1| \Big\} (a_1 + a_1^\dagger)(a_2 + a_2^\dagger) \Big\{ |1\rangle|0\rangle + |0\rangle|1\rangle \Big\} = \frac{\hbar\omega}{2} \ ,$$

$$\langle 1_{\rm II}|V|1_{\rm II}\rangle = \frac{\hbar\omega}{4} \Big\{ \langle 1|\langle 0| - \langle 0|\langle 1| \Big\} (a_1 + a_1^\dagger)(a_2 + a_2^\dagger) \Big\{ |1\rangle|0\rangle - |0\rangle|1\rangle \Big\} = -\frac{\hbar\omega}{2} \ ,$$

$$\langle 1_{\rm I}|V|1_{\rm II}\rangle = \frac{m\omega^2}{2} \Big\{ \langle 1|\langle 0| + \langle 0|\langle 1| \Big\} x_1 x_2 \Big\{ |1\rangle|0\rangle - |0\rangle|1\rangle \Big\} \langle 0,0|1,s_z\rangle = 0 \ .$$

Gli autovalori corretti al prim'ordine, con i rispettivi autoket e degenerazioni sono

$$E_{1_+} = E_1^{(0)} + \lambda \frac{\hbar\omega}{2} = \hbar\omega \Big( 2 + \frac{\lambda}{2} \Big) \ ,$$

$$E_{1_-} = E_1^{(0)} - \lambda \frac{\hbar\omega}{2} = \hbar\omega \Big( 2 - \frac{\lambda}{2} \Big) \ ,$$

$$|1_+\rangle = |1_{\rm I}\rangle \ , \qquad g = 1 \ ,$$

$$|1_-\rangle = |1_{\rm II}\rangle \ , \qquad g = 3 \ .$$

Gli autoket, l'autovalore e la degenerazione del secondo stato eccitato sono

$$
\begin{aligned}
|2_{\mathrm{I}}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{|2\rangle|0\rangle + |0\rangle|2\rangle\Big\}|0,0\rangle_{s,s_z} \ , \\
|2_{\mathrm{II}}\rangle &= |1\rangle|1\rangle|0,0\rangle_{s,s_z} \ , \\
|2_{\mathrm{III}}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{|2\rangle|0\rangle - |0\rangle|2\rangle\Big\}|1,s_z\rangle_{s,s_z} \ ,
\end{aligned}
$$

$$
E_2^{(0)} = 3\hbar\omega \ , \qquad g = 5 \ .
$$

Poiché la perturbazione non agisce slla parte spinoriale della funzione d'onda gli elementi di matrice di $V$ fra stati con spin differente sono nulli.

$$
\langle 2_{\mathrm{I}}|V|2_{\mathrm{III}}\rangle = \langle 2_{\mathrm{II}}|V|2_{\mathrm{III}}\rangle = 0
$$

Possiamo perciò considerare separatamente gli stati di singoletto e gli stati di tripletto.

Per gli stati di singoletto la trattazione è identica al caso di bosoni di spin 0 ; la correzione al prim'ordine della teoria delle perturbazioni è data da

$$
\begin{aligned}
\langle 2_{\mathrm{I}}|V|2_{\mathrm{I}}\rangle &= \langle 2_{\mathrm{II}}|V|2_{\mathrm{II}}\rangle = 0 \ , \\
\langle 2_{\mathrm{I}}|V|2_{\mathrm{II}}\rangle &= \hbar\omega \ ,
\end{aligned}
$$

perciò

$$
V = \hbar\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_\pm = \pm\hbar\omega \ , \qquad |\lambda_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{|2_{\mathrm{I}}\rangle + |2_{\mathrm{II}}\rangle\Big\} \ .
$$

Gli autovalori corretti al prim'ordine, con i rispettivi autoket e degenerazioni sono

$$
E_{2_\pm} = E_2^{(0)} \pm \lambda\hbar\omega = \hbar\omega(3 \pm \lambda) \ ,
$$

$$
\begin{aligned}
|2_+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{|2_{\mathrm{I}}\rangle + |2_{\mathrm{II}}\rangle\Big\} = \frac{1}{2}\Big\{|2\rangle|0\rangle + |0\rangle|2\rangle + \sqrt{2}|1\rangle|1\rangle\Big\}|0,0\rangle_{s,s_z} \ , \quad g = 1 \ , \\
|2_-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{|2_{\mathrm{I}}\rangle - |2_{\mathrm{II}}\rangle\Big\} = \frac{1}{2}\Big\{|2\rangle|0\rangle + |0\rangle|2\rangle - \sqrt{2}|1\rangle|1\rangle\Big\}|0,0\rangle_{s,s_z} \ . \quad g = 1 \ .
\end{aligned}
$$

Per lo stato di tripletto la correzione al prim'ordine della teoria delle perturbazioni è data da

$$
\langle 2_{\mathrm{III}}|V|2_{\mathrm{III}}\rangle = 0
$$

L'autovalore corretto al prim'ordine, con il rispettivo autoket e degenerazione è

$$
E_{2_0} = E_2^{(0)} = 3\hbar\omega \ ,
$$

$$
|2_0\rangle = |2_{\mathrm{III}}\rangle, \quad g = 3 \ .
$$

**3)** Per risolvere esattamente il problema introduciamo la coordinata del centro di massa e relativa e passiamo nel sistema di riferimento del centro di massa

$$\begin{cases} X = (x_1 + x_2)/2 \\ x \ = x_1 - x_2 \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{cases} x_1 = X + x/2 \\ x_2 = X - x/2 \end{cases}$$

quindi

$$x_1^2 + x_2^2 = 2X^2 + \frac{x^2}{2} \ , \qquad x_1 x_2 = X^2 - \frac{x^2}{4} \ .$$

$$H = \frac{P^2}{2M} + \frac{p^2}{2\mu} + \frac{m\omega^2}{2}\Big(2X^2 + \frac{x^2}{2}\Big) + \lambda m\omega^2\Big(X^2 - \frac{x^2}{4}\Big) = H_N + H_n \ ,$$

$$\begin{aligned} H_N &= \frac{P^2}{2M} + \frac{M\omega^2}{2}(1+\lambda)X^2 = \frac{P^2}{2M} + \frac{M\omega_+^2}{2}X^2 \ , \\ H_n &= \frac{p^2}{2\mu} + \frac{\mu\omega^2}{2}(1-\lambda)x^2 = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{M\omega_-^2}{2}x^2 \ , \end{aligned}$$

dove $\quad P = M\dot{X} \ , \quad p = \mu\dot{x} \ , \quad M = 2m \ ,, \quad \mu = m/2 \ , \quad \omega_\pm = \omega\sqrt{1 \pm \lambda} \ .$
Gli autovalori e le autofunzioni dell'Hamiltoniana sono quindi

$$E_{N,n} = \hbar\omega_+(N + \frac{1}{2}) + \hbar\omega_-(n + \frac{1}{2}) \ , \qquad |N, n, s, s_z\rangle = |N\rangle|n\rangle|s, s_z\rangle$$

dove $|N\rangle$ è l'autoket di un oscillatore armonico unidimensionale di massa $M$ e pulsazione $\omega_+$ mentre e $|n\rangle$ è l'autoket di un oscillatore armonico unidimensionale di massa $\mu$ e pulsazione $\omega_-$; $|s, s_z\rangle$ è la parte spinoriale della funzione d'onda. Sviluppando per $\lambda \ll 1$

$$E_{N,n} = \hbar\omega\Big(N + n + 1 + \frac{\lambda}{2}(N - n)\Big) + o(\lambda) \ .$$

Nel sistema del centro di massa lo scambio di particelle equivale alla trasformazione

$$\begin{cases} X = (x_1 + x_2)/2 & \rightarrow \quad (x_2 + x_1)/2 = X \\ x \ = x_1 - x_2 & \rightarrow \quad x_2 - x_1 = -x \end{cases}$$

quindi gli autoket si trasformano nel seguente modo

$$|N\rangle \ \ \rightarrow \ \ |N\rangle \ , \qquad |n\rangle \ \ \rightarrow \ \ (-1)^n|n\rangle \ .$$

Nel caso di bosoni di spin 0 la parte spinoriale della funzione d'onda è simmetrica per scambio di particelle percui dobbiamo scegliere $n$ pari per garantire la simmetria della funzione d'onda complessiva per scambio di particelle.

I primi livelli energetici con i rispettivi autoket, autovalori e degenerazioni nell'approssimazione $\lambda \ll 1$ sono

$$
\begin{array}{lll}
|0\rangle_N |0\rangle_n |0,0\rangle_{s,s_z} \ , & E \simeq \hbar\omega \ , & g = 1 \ , \\
|1\rangle_N |0\rangle_n |0,0\rangle_{s,s_z} \ , & E \simeq \hbar\omega\Big(2 + \dfrac{\lambda}{2}\Big) \ , & g = 1 \ , \\
|0\rangle_N |2\rangle_n |0,0\rangle_{s,s_z} \ , & E \simeq \hbar\omega(3 - \lambda) \ , & g = 1 \ , \\
|2\rangle_N |0\rangle_n |0,0\rangle_{s,s_z} \ , & E \simeq \hbar\omega(3 + \lambda) \ , & g = 1 \ .
\end{array}
$$

Nel caso di fermioni di spin 1/2 la parte spinoriale della funzione d'onda può essere antisimmetrica o simmetrica per scambio di particelle dovremo perciò accoppiarla rispettivamente con la parte spaziale con $n$ pari o dispari per garantire l'antisimmetria della funzione d'onda complessiva per scambio di particelle.

I primi livelli energetici con i rispettivi autoket, autovalori e degenerazioni nell'approssimazione $\lambda \ll 1$ sono

$$
\begin{array}{lll}
|0\rangle_N |0\rangle_n |0,0\rangle_{s,s_z} \ , & E \simeq \hbar\omega \ , & g = 1 \ , \\
|0\rangle_N |1\rangle_n |1,s_z\rangle_{s,s_z} \ , & E \simeq \hbar\omega\Big(2 - \dfrac{\lambda}{2}\Big) \ , & g = 3 \ , \\
|1\rangle_N |0\rangle_n |0,0\rangle_{s,s_z} \ , & E \simeq \hbar\omega\Big(2 + \dfrac{\lambda}{2}\Big) \ , & g = 1 \ , \\
|0\rangle_N |2\rangle_n |0,0\rangle_{s,s_z} \ , & E \simeq \hbar\omega(3 - \lambda) \ , & g = 1 \ , \\
|1\rangle_N |1\rangle_n |1,s_z\rangle_{s,s_z} \ , & E \simeq 3\hbar\omega \ , & g = 3 \ , \\
|2\rangle_N |0\rangle_n |0,0\rangle_{s,s_z} \ , & E \simeq \hbar\omega(3 + \lambda) \ , & g = 1 \ .
\end{array}
$$

Gli autovalori calcolati al prim'ordine in $\lambda$ corrispondono a quelli trovati con lateoria delle perturbazioni, per dimostrare che anche gli autoket corrispondono notiamo che

$$
X = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_+}}(A + A^\dagger) \simeq \sqrt{\frac{\hbar}{4m\omega_+}}(A + A^\dagger) \ , \quad x = \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega_-}}(a + a^\dagger) \simeq \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_-}}(a + a^\dagger)
$$

$$
\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a_1 + a_1^\dagger + a_2 + a_2^\dagger) \ , \quad x_1 - x_2 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a_1 + a_1^\dagger - a_2 - a_2^\dagger)
$$

perció

$$
A \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 + a_2) \ , \qquad a \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 - a_2) \ .
$$

Consideriamo solo la parte spaziale della funzione d'onda in quanto la parte spinoriale coincide per entrambi i metodi.

Il livello fondamentale è dato da

$$|0\rangle_N|0\rangle_n \simeq |0\rangle_{n_1}|0\rangle_{n_2} \ ,$$

ricaviamo gli altri autostati applicando gli operatori $A^\dagger$ e $a^\dagger$:

$$\begin{aligned}
A^\dagger|0\rangle_N|0\rangle_n &= |1\rangle_N|0\rangle_n \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^\dagger + a_2^\dagger)|0\rangle_{n_1}|0\rangle_{n_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{|1\rangle_{n_1}|0\rangle_{n_2} + |0\rangle_{n_1}|1\rangle_{n_2}\Big\} \ , \\
A^\dagger|1\rangle_N|0\rangle_n &= \sqrt{2}|2\rangle_N|0\rangle_n \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^\dagger + a_2^\dagger)\frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{|1\rangle_{n_1}|0\rangle_{n_2} + |0\rangle_{n_1}|1\rangle_{n_2}\Big\} \\
&= \frac{1}{2}\Big\{\sqrt{2}|2\rangle_{n_1}|0\rangle_{n_2} + \sqrt{2}|0\rangle_{n_1}|2\rangle_{n_2} + 2|1\rangle_{n_1}|1\rangle_{n_2}\Big\} \ , \\
a^\dagger|0\rangle_N|0\rangle_n &= |0\rangle_N|1\rangle_n \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^\dagger - a_2^\dagger)|0\rangle_{n_1}|0\rangle_{n_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{|1\rangle_{n_1}|0\rangle_{n_2} - |0\rangle_{n_1}|1\rangle_{n_2}\Big\} \ , \\
a^\dagger|0\rangle_N|1\rangle_n &= \sqrt{2}|0\rangle_N|2\rangle_n \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^\dagger - a_2^\dagger)\frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{|1\rangle_{n_1}|0\rangle_{n_2} - |0\rangle_{n_1}|1\rangle_{n_2}\Big\} \\
&= \frac{1}{2}\Big\{\sqrt{2}|2\rangle_{n_1}|0\rangle_{n_2} + \sqrt{2}|0\rangle_{n_1}|2\rangle_{n_2} - 2|1\rangle_{n_1}|1\rangle_{n_2}\Big\} \ , \\
a^\dagger|1\rangle_N|0\rangle_n &= |1\rangle_N|1\rangle_n \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^\dagger - a_2^\dagger)\frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{|1\rangle_{n_1}|0\rangle_{n_2} + |0\rangle_{n_1}|1\rangle_{n_2}\Big\} \\
&= \frac{1}{2}\Big\{\sqrt{2}|2\rangle_{n_1}|0\rangle_{n_2} - \sqrt{2}|0\rangle_{n_1}|2\rangle_{n_2}\Big\} \ ,
\end{aligned}$$

ricapitolando,

$$\begin{aligned}
|0\rangle_N|0\rangle_n &\simeq |0\rangle_{n_1}|0\rangle_{n_2} \ , \\
|1\rangle_N|0\rangle_n &\simeq \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{|1\rangle_{n_1}|0\rangle_{n_2} + |0\rangle_{n_1}|1\rangle_{n_2}\Big\} \ , \\
|0\rangle_N|1\rangle_n &\simeq \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{|1\rangle_{n_1}|0\rangle_{n_2} - |0\rangle_{n_1}|1\rangle_{n_2}\Big\} \ , \\
|2\rangle_N|0\rangle_n &\simeq \frac{1}{2}\Big\{|2\rangle_{n_1}|0\rangle_{n_2} + |0\rangle_{n_1}|2\rangle_{n_2} + \sqrt{2}|1\rangle_{n_1}|1\rangle_{n_2}\Big\} \ , \\
|0\rangle_N|2\rangle_n &\simeq \frac{1}{2}\Big\{|2\rangle_{n_1}|0\rangle_{n_2} + |0\rangle_{n_1}|2\rangle_{n_2} - \sqrt{2}|1\rangle_{n_1}|1\rangle_{n_2}\Big\} \ , \\
|1\rangle_N|1\rangle_n &\simeq \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{|2\rangle_{n_1}|0\rangle_{n_2} - |0\rangle_{n_1}|2\rangle_{n_2}\Big\} \ .
\end{aligned}$$

# Esercizio 21

Si consideri l'effetto di un campo elettrico uniforme sugli stati eccitati di un atomo di idrogeno (effetto Stark lineare).

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{|\vec{r}|} - ez|\vec{E}| \ .$$

**1)** Considerando il campo elettrico come una perturbazione e trascurando gli effetti di struttura fine dell'atomo di idrogeno determinare le correzioni degli autovalori al prim'ordine della teoria delle perturbazioni per lo stato fondamentale e per il primo stato eccitato. Discutere le relative degenerazioni.

# Soluzione

**1)** Gli autostati e gli autovalori con relativa degenerazione dell'atomo di idrogeno sono

$$\psi_{n,l,l_z} = R_{n,l}(r) Y_{l,l_z}(\theta,\phi) \ , \quad (0 \le l < n) \ , \qquad E_n = -\frac{e^2}{2r_0 n^2} \ , \qquad g = n^2 \ .$$

Per lo stato fondamentale abbiamo che

$$|1,0,0\rangle \ , \qquad E_1 = -\frac{e^2}{2r_0} \ , \qquad g = 1 \ ,$$

e la correzione al prim'ordine dell'energia è data da

$$\langle 1,0,0|V|1,0,0\rangle = -e|\vec{E}|\langle 1,0,0|r\cos\theta|1,0,0\rangle = 0$$

Per il primo stato eccitato abbiamo che

$$|2,1,l_z\rangle \ , \quad |2,0,0\rangle \ , \qquad E_2 = -\frac{e^2}{8r_0} \ , \qquad g = 4 \ ,$$

per ottenere la correzione al prim'ordine dell'energia dobbiamo calcolare il valore di aspettazione di $V$ nel sottospazio degenre di dimensione 4. Notiamo che poiché la perturbazione è dispari per operazione di parità avrà elementi di matrice non nulli solo fra gli stati con parità opposta (nel nostro caso $l = 1$ e $l = 0$); inoltre $V$ non agisce sulla componente $l_z$ degli autostati quindi avrà elementi di matrice non nulli fra gli stati con ugual valore di $l_z$. Dobbiamo perció calcolare solamente

$$\begin{aligned}
\langle 2,1,0|V|2,0,0\rangle &= -e|\vec{E}| \int_0^\infty R_{21}^*(r) R_{20}(r) r r^2 dr \int Y_{10}^*(\theta,\phi) Y_{00}(\theta,\phi) d\Omega \\
&= -e|\vec{E}| \frac{1}{4\sqrt{3} r_0^4} \int_0^\infty e^{-r/r_0} \left(1 - \frac{r}{2r_0}\right) r^4 dr \ 2\pi \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \frac{2}{3} \\
&= -\frac{e|\vec{E}|}{12 r_0^4} \left( -\frac{3}{2} \int_0^\infty e^{-r/r_0} r^4 dr \right) = 3e|\vec{E}| r_0 \ ,
\end{aligned}$$

dove l'ultimo integrale si effettua integrando ripetutamente per parti.

Abbiamo quindi che

$$V = 3e|\vec{E}|r_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

nella base degli autostati

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |2,0,0\rangle , \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |2,1,0\rangle , \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |2,1,1\rangle , \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |2,1,-1\rangle .$$

Diagonalizzando la matrice otteniamo come autovalore $\lambda_0 = 0$ con molteplicità 2 e gli autovalori $\lambda_\pm = \pm 3e|\vec{E}|r_0$ con molteplicità 1.

Una base di autostati che diagonalizza $V$ è quindi

$$|2,1,1\rangle , \quad |2,1,-1\rangle , \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{|2,0,0\rangle + |2,1,0\rangle\Big\} , \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{|2,0,0\rangle - |2,1,0\rangle\Big\} .$$

Per effetto della perturbazione la degenerazione viene quindi parzialmente rimossa: abbiamo infatti i due stati con $l_z \neq 0$ la cui energia non viene modificata dalla perturbazione

$$|2,1,1\rangle , \quad |2,1,-1\rangle , \quad E = E_2 , \quad g = 2 ,$$

e i due stati con $l_z = 0$ la cui degenerazione viene rimossa

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{|2,0,0\rangle + |2,1,0\rangle\Big\} , \quad E_+ = E_2 + 3e|\vec{E}|r_0 , \quad g = 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{|2,0,0\rangle - |2,1,0\rangle\Big\} , \quad E_+ = E_2 - 3e|\vec{E}|r_0 , \quad g = 1 .$$

# 35. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND $d$ FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, *e.g.*, for −8/15 read $-\sqrt{8/15}$.

Notation:

| | | $J$ | $J$ | ... |
|---|---|---|---|---|
| | | $M$ | $M$ | ... |
| $m_1$ | $m_2$ | Coefficients | | |
| $m_1$ | $m_2$ | | | |
| . | . | | | |

## 1/2×1/2

| $m_1$ | $m_2$ | 1 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | +1 | | |
| +1/2 | +1/2 | 1 | | |
| | | 1 | 0 | |
| | | 0 | 0 | |
| +1/2 | −1/2 | 1/2 | 1/2 | |
| −1/2 | +1/2 | 1/2 | −1/2 | |
| | | 1 | | |
| | | −1 | | |
| −1/2 | −1/2 | 1 | | |

## 1×1/2

| $m_1$ | $m_2$ | 3/2 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | +3/2 | | |
| +1 | +1/2 | 1 | | |
| | | 3/2 | 1/2 | |
| | | +1/2 | +1/2 | |
| +1 | −1/2 | 1/3 | 2/3 | |
| 0 | +1/2 | 2/3 | −1/3 | |
| | | 3/2 | 1/2 | |
| | | −1/2 | −1/2 | |
| 0 | −1/2 | 2/3 | 1/3 | |
| −1 | +1/2 | 1/3 | −2/3 | |
| | | 3/2 | | |
| | | −3/2 | | |
| −1 | −1/2 | 1 | | |

## 2×1/2

| $m_1$ | $m_2$ | 5/2 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | +5/2 | | |
| +2 | +1/2 | 1 | | |
| | | 5/2 | 3/2 | |
| | | +3/2 | +3/2 | |
| +2 | −1/2 | 1/5 | 4/5 | |
| +1 | +1/2 | 4/5 | −1/5 | |
| | | 5/2 | 3/2 | |
| | | +1/2 | +1/2 | |
| +1 | −1/2 | 2/5 | 3/5 | |
| 0 | +1/2 | 3/5 | −2/5 | |
| | | 5/2 | 3/2 | |
| | | −1/2 | −1/2 | |
| 0 | −1/2 | 3/5 | 2/5 | |
| −1 | +1/2 | 2/5 | −3/5 | |
| | | 5/2 | 3/2 | |
| | | −3/2 | −3/2 | |
| −1 | −1/2 | 4/5 | 1/5 | |
| −2 | +1/2 | 1/5 | −4/5 | |
| | | 5/2 | | |
| | | −5/2 | | |
| −2 | −1/2 | 1 | | |

## 3/2×1/2

| $m_1$ | $m_2$ | 2 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | +2 | | |
| +3/2 | +1/2 | 1 | | |
| | | 2 | 1 | |
| | | +1 | +1 | |
| +3/2 | −1/2 | 1/4 | 3/4 | |
| +1/2 | +1/2 | 3/4 | −1/4 | |
| | | 2 | 1 | |
| | | 0 | 0 | |
| +1/2 | −1/2 | 1/2 | 1/2 | |
| −1/2 | +1/2 | 1/2 | −1/2 | |
| | | 2 | 1 | |
| | | −1 | −1 | |
| −1/2 | −1/2 | 3/4 | 1/4 | |
| −3/2 | +1/2 | 1/4 | −3/4 | |
| | | 2 | | |
| | | −2 | | |
| −3/2 | −1/2 | 1 | | |

## 2×1

| $m_1$ | $m_2$ | 3 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | +3 | | |
| +2 | +1 | 1 | | |
| | | 3 | 2 | |
| | | +2 | +2 | |
| +2 | 0 | 1/3 | 2/3 | |
| +1 | +1 | 2/3 | −1/3 | |
| | | 3 | 2 | 1 |
| | | +1 | +1 | +1 |
| +2 | −1 | 1/15 | 1/3 | 3/5 |
| +1 | 0 | 8/15 | 1/6 | −3/10 |
| 0 | +1 | 2/5 | −1/2 | 1/10 |
| | | 3 | 2 | 1 |
| | | 0 | 0 | 0 |
| +1 | −1 | 1/5 | 1/2 | 3/10 |
| 0 | 0 | 3/5 | 0 | −2/5 |
| −1 | +1 | 1/5 | −1/2 | 3/10 |
| | | 3 | 2 | 1 |
| | | −1 | −1 | −1 |
| 0 | −1 | 2/5 | 1/2 | 1/10 |
| −1 | 0 | 8/15 | −1/6 | −3/10 |
| −2 | +1 | 1/15 | −1/3 | 3/5 |
| | | 3 | 2 | |
| | | −2 | −2 | |
| −1 | −1 | 2/3 | 1/3 | |
| −2 | 0 | 1/3 | −2/3 | |
| | | 3 | | |
| | | −3 | | |
| −2 | −1 | 1 | | |

## 1×1

| $m_1$ | $m_2$ | 2 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | +2 | | |
| +1 | +1 | 1 | | |
| | | 2 | 1 | |
| | | +1 | +1 | |
| +1 | 0 | 1/2 | 1/2 | |
| 0 | +1 | 1/2 | −1/2 | |
| | | 2 | 1 | 0 |
| | | 0 | 0 | 0 |
| +1 | −1 | 1/6 | 1/2 | 1/3 |
| 0 | 0 | 2/3 | 0 | −1/3 |
| −1 | +1 | 1/6 | −1/2 | 1/3 |
| | | 2 | 1 | |
| | | −1 | −1 | |
| 0 | −1 | 1/2 | 1/2 | |
| −1 | 0 | 1/2 | −1/2 | |
| | | 2 | | |
| | | −2 | | |
| −1 | −1 | 1 | | |

## 3/2×1

| $m_1$ | $m_2$ | 5/2 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | +5/2 | | |
| +3/2 | +1 | 1 | | |
| | | 5/2 | 3/2 | |
| | | +3/2 | +3/2 | |
| +3/2 | 0 | 2/5 | 3/5 | |
| +1/2 | +1 | 3/5 | −2/5 | |
| | | 5/2 | 3/2 | 1/2 |
| | | +1/2 | +1/2 | +1/2 |
| +3/2 | −1 | 1/10 | 2/5 | 1/2 |
| +1/2 | 0 | 3/5 | 1/15 | −1/3 |
| −1/2 | +1 | 3/10 | −8/15 | 1/6 |
| | | 5/2 | 3/2 | 1/2 |
| | | −1/2 | −1/2 | −1/2 |
| +1/2 | −1 | 3/10 | 8/15 | 1/6 |
| −1/2 | 0 | 3/5 | −1/15 | −1/3 |
| −3/2 | +1 | 1/10 | −2/5 | 1/2 |
| | | 5/2 | 3/2 | |
| | | −3/2 | −3/2 | |
| −1/2 | −1 | 3/5 | 2/5 | |
| −3/2 | 0 | 2/5 | −3/5 | |
| | | 5/2 | | |
| | | −5/2 | | |
| −3/2 | −1 | 1 | | |

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\Big(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\Big)$$

$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta\, e^{2i\phi}$$

$$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*}$$

$$d^\ell_{m,0} = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\, Y_\ell^m\, e^{-im\phi}$$

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J M\rangle = (-1)^{J-j_1-j_2}\langle j_2 j_1 m_2 m_1 | j_2 j_1 J M\rangle$$

$$d^j_{m',m} = (-1)^{m-m'} d^j_{m,m'} = d^j_{-m,-m'}$$

## 3/2×3/2

| $m_1$ | $m_2$ | 3 | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | +3 | | | |
| +3/2 | +3/2 | 1 | | | |
| | | 3 | 2 | | |
| | | +2 | +2 | | |
| +3/2 | +1/2 | 1/2 | 1/2 | | |
| +1/2 | +3/2 | 1/2 | −1/2 | | |
| | | 3 | 2 | 1 | |
| | | +1 | +1 | +1 | |
| +3/2 | −1/2 | 1/5 | 1/2 | 3/10 | |
| +1/2 | +1/2 | 3/5 | 0 | −2/5 | |
| −1/2 | +3/2 | 1/5 | −1/2 | 3/10 | |
| | | 3 | 2 | 1 | 0 |
| | | 0 | 0 | 0 | 0 |
| +3/2 | −3/2 | 1/20 | 1/4 | 9/20 | 1/4 |
| +1/2 | −1/2 | 9/20 | 1/4 | −1/20 | −1/4 |
| −1/2 | +1/2 | 9/20 | −1/4 | −1/20 | 1/4 |
| −3/2 | +3/2 | 1/20 | −1/4 | 9/20 | −1/4 |
| | | 3 | 2 | 1 | |
| | | −1 | −1 | −1 | |
| +1/2 | −3/2 | 1/5 | 1/2 | 3/10 | |
| −1/2 | −1/2 | 3/5 | 0 | −2/5 | |
| −3/2 | +1/2 | 1/5 | −1/2 | 3/10 | |
| | | 3 | 2 | | |
| | | −2 | −2 | | |
| −1/2 | −3/2 | 1/2 | 1/2 | | |
| −3/2 | −1/2 | 1/2 | −1/2 | | |
| | | 3 | | | |
| | | −3 | | | |
| −3/2 | −3/2 | 1 | | | |

## 2×3/2

| $m_1$ | $m_2$ | 7/2 | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | +7/2 | | | |
| +2 | +3/2 | 1 | | | |
| | | 7/2 | 5/2 | | |
| | | +5/2 | +5/2 | | |
| +2 | +1/2 | 3/7 | 4/7 | | |
| +1 | +3/2 | 4/7 | −3/7 | | |
| | | 7/2 | 5/2 | 3/2 | |
| | | +3/2 | +3/2 | +3/2 | |
| +2 | −1/2 | 1/7 | 16/35 | 2/5 | |
| +1 | +1/2 | 4/7 | 1/35 | −2/5 | |
| 0 | +3/2 | 2/7 | −18/35 | 1/5 | |
| | | 7/2 | 5/2 | 3/2 | 1/2 |
| | | +1/2 | +1/2 | +1/2 | +1/2 |
| +2 | −3/2 | 1/35 | 6/35 | 2/5 | 2/5 |
| +1 | −1/2 | 12/35 | 5/14 | 0 | −3/10 |
| 0 | +1/2 | 18/35 | −3/35 | −1/5 | 1/5 |
| −1 | +3/2 | 4/35 | −27/70 | 2/5 | −1/10 |
| | | 7/2 | 5/2 | 3/2 | 1/2 |
| | | −1/2 | −1/2 | −1/2 | −1/2 |
| +1 | −3/2 | 4/35 | 27/70 | 2/5 | 1/10 |
| 0 | −1/2 | 18/35 | 3/35 | −1/5 | −1/5 |
| −1 | +1/2 | 12/35 | −5/14 | 0 | 3/10 |
| −2 | +3/2 | 1/35 | −6/35 | 2/5 | −2/5 |
| | | 7/2 | 5/2 | 3/2 | |
| | | −3/2 | −3/2 | −3/2 | |
| 0 | −3/2 | 2/7 | 18/35 | 1/5 | |
| −1 | −1/2 | 4/7 | −1/35 | −2/5 | |
| −2 | +1/2 | 1/7 | −16/35 | 2/5 | |
| | | 7/2 | 5/2 | | |
| | | −5/2 | −5/2 | | |
| −1 | −3/2 | 4/7 | 3/7 | | |
| −2 | −1/2 | 3/7 | −4/7 | | |
| | | 7/2 | | | |
| | | −7/2 | | | |
| −2 | −3/2 | 1 | | | |

## 2×2

| $m_1$ | $m_2$ | 4 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | +4 | | | | |
| +2 | +2 | 1 | | | | |
| | | 4 | 3 | | | |
| | | +3 | +3 | | | |
| +2 | +1 | 1/2 | 1/2 | | | |
| +1 | +2 | 1/2 | −1/2 | | | |
| | | 4 | 3 | 2 | | |
| | | +2 | +2 | +2 | | |
| +2 | 0 | 3/14 | 1/2 | 2/7 | | |
| +1 | +1 | 4/7 | 0 | −3/7 | | |
| 0 | +2 | 3/14 | −1/2 | 2/7 | | |
| | | 4 | 3 | 2 | 1 | |
| | | +1 | +1 | +1 | +1 | |
| +2 | −1 | 1/14 | 3/10 | 3/7 | 1/5 | |
| +1 | 0 | 3/7 | 1/5 | −1/14 | −3/10 | |
| 0 | +1 | 3/7 | −1/5 | −1/14 | 3/10 | |
| −1 | +2 | 1/14 | −3/10 | 3/7 | −1/5 | |
| | | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| +2 | −2 | 1/70 | 1/10 | 2/7 | 2/5 | 1/5 |
| +1 | −1 | 8/35 | 2/5 | 1/14 | −1/10 | −1/5 |
| 0 | 0 | 18/35 | 0 | −2/7 | 0 | 1/5 |
| −1 | +1 | 8/35 | −2/5 | 1/14 | 1/10 | −1/5 |
| −2 | +2 | 1/70 | −1/10 | 2/7 | −2/5 | 1/5 |
| | | 4 | 3 | 2 | 1 | |
| | | −1 | −1 | −1 | −1 | |
| +1 | −2 | 1/14 | 3/10 | 3/7 | 1/5 | |
| 0 | −1 | 3/7 | 1/5 | −1/14 | −3/10 | |
| −1 | 0 | 3/7 | −1/5 | −1/14 | 3/10 | |
| −2 | +1 | 1/14 | −3/10 | 3/7 | −1/5 | |
| | | 4 | 3 | 2 | | |
| | | −2 | −2 | −2 | | |
| 0 | −2 | 3/14 | 1/2 | 2/7 | | |
| −1 | −1 | 4/7 | 0 | −3/7 | | |
| −2 | 0 | 3/14 | −1/2 | 2/7 | | |
| | | 4 | 3 | | | |
| | | −3 | −3 | | | |
| −1 | −2 | 1/2 | 1/2 | | | |
| −2 | −1 | 1/2 | −1/2 | | | |
| | | 4 | | | | |
| | | −4 | | | | |
| −2 | −2 | 1 | | | | |

$$d^1_{0,0} = \cos\theta \qquad d^{1/2}_{1/2,1/2} = \cos\frac{\theta}{2} \qquad d^{1/2}_{1/2,-1/2} = -\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^1_{1,1} = \frac{1+\cos\theta}{2} \qquad d^1_{1,0} = -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \qquad d^1_{1,-1} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

$$d^{3/2}_{3/2,3/2} = \frac{1+\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d^{3/2}_{3/2,1/2} = -\sqrt{3}\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^{3/2}_{3/2,-1/2} = \sqrt{3}\frac{1-\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d^{3/2}_{3/2,-3/2} = -\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^{3/2}_{1/2,1/2} = \frac{3\cos\theta-1}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d^{3/2}_{1/2,-1/2} = -\frac{3\cos\theta+1}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^2_{2,2} = \Big(\frac{1+\cos\theta}{2}\Big)^2$$

$$d^2_{2,1} = -\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\theta$$

$$d^2_{2,0} = \frac{\sqrt{6}}{4}\sin^2\theta$$

$$d^2_{2,-1} = -\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\theta$$

$$d^2_{2,-2} = \Big(\frac{1-\cos\theta}{2}\Big)^2$$

$$d^2_{1,1} = \frac{1+\cos\theta}{2}(2\cos\theta-1)$$

$$d^2_{1,0} = -\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta\cos\theta$$

$$d^2_{1,-1} = \frac{1-\cos\theta}{2}(2\cos\theta+1)$$

$$d^2_{0,0} = \Big(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\Big)$$

**Figure 35.1**: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974). The coefficients here have been calculated using computer programs written independently by Cohen and at LBNL.