I esonero di Meccanica Quantistica
22/2/2006 A.A. 2005–2006
Proff. G. Martinelli, A. Pugliese

Esercizio n. 1

Una particella di spin 1/2 e massa m è vincolata a muoversi su una sfera di raggio R.

Al tempo t =0 lo stato della particella è descritto dallo spinore

$$|\psi\rangle_0 \equiv \Psi(\theta,\varphi) = N \begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\varphi \\ \frac{1}{\sqrt{3}} + \cos\theta \end{pmatrix},$$

dove N è la costante di normalizzaione.

La sua Hamiltoniana è:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2mR^2}\hat{L}^2 + \omega(\hat{L}_z + 2\hat{S}_z).$$

1. Determinare al tempo t =0 i possibili risultati di una misura di $\hat{L}^2$, $\hat{L}_z$, $\hat{S}_z$, $\hat{J}^2$ e $\hat{J}_z$ e le relative probabilità, dove $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$;
2. determinare lo stato del sistema al tempo t;
3. dire quali dei risultati di cui al punto 1) valgono ad ogni tempo, e motivare la risposta;
4. (facoltativo) determinare in funzione del tempo il valor medio di $\hat{J}^2$.

Le armoniche sferiche $Y_l^m(\theta,\varphi)$ sono:

$$\begin{aligned} Y_0^0(\theta,\varphi) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_1^1(\theta,\varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\varphi}, \quad Y_1^0(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \\ Y_2^2(\theta,\varphi) &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{i2\varphi}, \quad Y_2^1(\theta,\varphi) = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{i\varphi}, \\ Y_2^0(\theta,\varphi) &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta - 1), \quad Y_l^{-m} = (-)^m\left(Y_l^m\right)^*. \end{aligned}$$

Esercizio n. 2

Si consideri un oscillatore armonico tridimensionale descritto dall'Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \vec{r}^2}{2} + \frac{\Delta E}{\hbar} \hat{L}_z \,, \tag{1}$$

il cui stato, all'istante $t = 0$ è descritto dalla funzione d'onda:

$$\begin{aligned}\psi(\vec{r}) = &\frac{1}{\sqrt{3}}\, \psi_1\left(\sqrt{m\omega/\hbar}\, x\right) \psi_0\left(\sqrt{m\omega/\hbar}\, y\right) \psi_0\left(\sqrt{m\omega/\hbar}\, z\right) \\ &+\sqrt{\frac{2}{3}}\, \psi_0\left(\sqrt{m\omega/\hbar}\, x\right) \psi_0\left(\sqrt{m\omega/\hbar}\, y\right) \psi_1\left(\sqrt{m\omega/\hbar}\, z\right) \,,\end{aligned} \tag{2}$$

dove le funzioni $\psi_n(\xi)$ sono definite più sotto.

1. Se si misura il momento angolare lungo l'asse z, $\hat{L}_z$, dire quali valori si possono ottenere e con quale probabilità;
2. Calcolare l'energia media dello stato;
3. Determinare lo stato del sistema all'istante t;
4. Facoltativo: calcolare il valor medio dell'operatore $\hat{O} = xz$ in funzione del tempo.

Le funzioni $\psi_n(\xi)$ sono:

$$\begin{aligned}\psi_n(\xi) &= \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n\, n!}} H_n(\xi) e^{-\xi^2/2} \,, \\ H_0(\xi) &= 1 \quad H_1(\xi) = 2\xi \quad H_2(\xi) = -2 + 4\xi^2 \\ H_3(\xi) &= -12\xi + 8\xi^3 \quad H_4(\xi) = 12 - 48\xi^2 + 16\xi^4 \,.\end{aligned} \tag{3}$$

Per il calcolo degli integrali si riportanto le seguenti formule utili:

$$\begin{aligned}I_n &= \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^{2n} e^{-\alpha x^2} = \frac{\Gamma(n+1/2)}{\alpha^n \sqrt{\pi}}. \\ \Gamma(x+1) &= x\Gamma(x), \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

1. Riscriviamo lo stato iniziale in armoniche sferiche, tenendo conto del fatto che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |1/2,\ 1/2\rangle_{S,S_z} \equiv |+\rangle, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1/2,\ -1/2\rangle_{S,S_z} \equiv |-\rangle \tag{4}$$

$$|\psi\rangle_0 = \psi(\theta,\ \phi,\ t=0) = N \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,(Y_{1,1} - Y_{1,-1}) \\ \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,(Y_{1,0} + Y_{0,0}) \end{pmatrix} = \tag{5}$$

$$= N\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\left[\Big(|1,1\rangle - |1,-1\rangle\Big)\otimes|1/2,1/2\rangle + \sqrt{2}\,\Big(|1,0\rangle + |0,0\rangle\Big)\otimes|1/2,-1/2\rangle\right] \tag{6}$$

dove abbiamo utilizzato una notazione

$$|l, l_z\rangle \otimes |s, s_z\rangle\,. \tag{7}$$

Scegliendo il fattore N in modo da normalizzare lo stato si ottiene

$$|\psi\rangle_0 \ = \ \sqrt{\frac{1}{6}}\left[\Big(|1,1\rangle - |1,-1\rangle\Big)\otimes|1/2,1/2\rangle + \sqrt{2}\,\Big(|1,0\rangle + |0,0\rangle\Big)\otimes|1/2,-1/2\rangle\right] \tag{8}$$

I risultati possibili di misure di $\hat{L}^2$, $\hat{L}_z$ e $\hat{S}_z$ e le rispettive probabilità sono dunque:

$$\begin{aligned} l = 0 \qquad & \wp = 1/3 \\ l = 1 \qquad & \wp = 2/3 \\ l_z = 0 \qquad & \wp = 2/3 \\ l_z = +1 \qquad & \wp = 1/6 \\ l_z = -1 \qquad & \wp = 1/6 \\ s_z = +1/2 \qquad & \wp = 1/3 \\ s_z = -1/2 \qquad & \wp = 2/3 \end{aligned}$$

Per rispondere alle stesse domande per $\hat{J}^2$ e $\hat{J}_z$ dobbiamo passare alla base $|j, j_z; l, s\rangle$; utilizzando gli opportuni coefficienti di Clebsch-Gordan si ottiene:

$$|\psi\rangle_0 \ = \ \sqrt{\frac{1}{6}}\Big\{|\frac{3}{2},\frac{3}{2},1,\frac{1}{2}\rangle - \Big(\sqrt{\frac{1}{3}}|\frac{3}{2},-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\rangle\Big) +$$

$$\begin{aligned}
&+ \quad \sqrt{2}\left[\left(\sqrt{\frac{2}{3}}|\frac{3}{2},-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\rangle\right) + |\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\rangle\right]\Bigg\} = \\
&= \quad \sqrt{\frac{1}{6}}\Bigg\{|\frac{3}{2},\frac{3}{2},1,\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|\frac{3}{2},-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\rangle + \\
&+ \quad 2\sqrt{\frac{2}{3}}|\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{2}|\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\rangle\Bigg\}
\end{aligned}$$

I valori richiesti sono quindi:

$$\begin{aligned}
j = 1/2 &\qquad \wp = 7/9 \\
j = 3/2 &\qquad \wp = 2/9 \\
j_z = 3/2 &\qquad \wp = 1/6 \\
j_z = -1/2 &\qquad \wp = 5/6
\end{aligned}$$

2. Gli stati $|l,l_z\rangle \otimes |s,s_z\rangle$ sono autostati dell'hamiltoniana. Utilizzando l'eq.(8) e raccogliendo una fase globale inessenziale, si ottiene dunque facilmente

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle \quad &= \quad e^{-i\frac{\hbar}{mR^2}t}\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}\, e^{-2i\omega t}|1,1\rangle|+\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}\,|1,-1\rangle|+\rangle + \right. \\
&+ \quad \left. e^{i\omega t}\frac{1}{\sqrt{3}}\,|1,0\rangle|-\rangle + e^{-i(-\frac{\hbar}{mR^2}-\omega)t}\frac{1}{\sqrt{3}}\,|0,0\rangle|-\rangle\right\} \qquad (9)
\end{aligned}$$

3. $\hat{L}^2$, $\hat{L}_z$, $\hat{S}_z$ e $\hat{J}_z$ commutano con l'hamiltoniana, pertanto questi operatori sono costanti del moto e le probabilità calcolate in precedenza valgono ad ogni $t > 0$; $\hat{J}^2$ non commuta con $\hat{H}$ e quindi le probabilità relative ai possibili risultati di una sua misura dipendono dal tempo.

4. (facoltativo) Con un calcolo diretto (tornando nella base $|j,j_z;l,s\rangle$ dopo l'evoluzione temporale) si ha:

$$\langle J^2\rangle_t = \hbar^2\Big[\frac{25}{12} - \frac{2}{3}\,\cos\omega t\Big] \qquad (10)$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

1. Utilizzando le espressioni fornite con il testo, si ottiene:

$$
\begin{aligned}
\psi(\vec{r}) &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2} \cdot \\
&\quad \cdot \left[\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{2}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x + \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{2}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,z\right] = \\
&= \frac{\tilde{R}(r)}{\sqrt{3}}\left[\sin\theta\cos\phi + \sqrt{2}\,\cos\theta\right] = \\
&= \frac{R_{n=1,l=1}(r)}{\sqrt{6}}\left[Y_{1,-1} - Y_{1,1} + 2\,Y_{1,0}\right]
\end{aligned}
$$

   dove

$$
R_{n=1,l=1}(r) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/4}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2}\,r
$$

   (si può controllare che lo stato é normalizzato).

   Le probabilità richieste valgono:

$$
\begin{aligned}
l_z &= 0 & \wp &= 2/3 \\
l_z &= +1 & \wp &= 1/6 \\
l_z &= -1 & \wp &= 1/6
\end{aligned}
$$

2.
$$
\langle H\rangle = \langle H_{OA}\rangle + \frac{\Delta E}{\hbar}\langle L_z\rangle = \frac{5}{2}\hbar\omega + 0 = \frac{5}{2}\hbar\omega\,, \tag{11}
$$

   poiche' il valor medio di L_z é nullo e il contributo della parte radiale é uguale per i tre stati ed é pari all'energia di un oscillatore isotropo con $n = 1$

$$
\langle L_z\rangle = \frac{1}{6}\langle 1,1|L_z|1,1\rangle + \frac{2}{3}\langle 1,0|L_z|1,0\rangle + \frac{1}{6}\langle 1,-1|L_z|1,-1\rangle\,. \tag{12}
$$

3. Si ha facilmente

$$
\psi(t) = e^{-i\frac{5\omega}{2}t}\,\frac{R_{n=1,l=1}(r)}{\sqrt{6}}\left[Y_{1,-1}\,e^{i\frac{\Delta E}{\hbar}t} - \,e^{-i\frac{\Delta E}{\hbar}t}Y_{1,1} + 2\,Y_{1,0}\right]. \tag{13}
$$

4. (facoltativo) Poichè l'operatore $\hat{O}$ é espresso in funzione delle coordinate cartesiane x e z, é conveniente tornare nella vecchia base, $|n_x\rangle|n_y\rangle|n_z\rangle$; dopo l'evoluzione temporale risulta (posto $\frac{\Delta E}{\hbar} = \Omega$):

$$
\begin{aligned}
\psi(t) &= \sqrt{\frac{1}{3}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/4}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2}\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2}\,r\,\cdot \\
&\cdot \left[Y_{1,-1}\,e^{i\Omega t} - Y_{1,1}\,e^{-i\Omega t} + 2\,Y_{1,0}\right] = \\
&= \sqrt{\frac{1}{3}}\left\{\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} r\,\cdot\right. \\
&\cdot \left.\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\left[\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(\,\sin\theta e^{-i\phi}\,e^{i\Omega t} + \sin\theta e^{i\phi}\,e^{-i\Omega t}) + 2\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\right]\right\} \\
&= \sqrt{\frac{1}{3}}\left\{\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} r\,\cdot\right. \\
&\cdot \left.\left[\sqrt{\frac{1}{2}}\,2\sin\theta\cos(\phi-\Omega t) + 2\cos\theta\right]\right\} = \\
&= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{5/4}\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\,e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2}\left[x\cos(\Omega t) + y\sin(\Omega t) + \sqrt{2}z\right] = \\
&= \sqrt{\frac{1}{3}}\Big(|1\rangle|0\rangle|0\rangle\,\cos(\Omega t) + |0\rangle|1\rangle|0\rangle\,\sin(\Omega t) + \sqrt{2}\,|0\rangle|0\rangle|1\rangle\Big)
\end{aligned}
$$

Poichè le direzioni coordinate sono indipendenti, il valor medio richiesto si fattorizza; inoltre, ricordando che gli elementi di matrice di $\hat{x}$ (o $\hat{y}$ o $\hat{z}$) sono non nulli solo se gli stati differiscono di una unità, é facile trovare:

$$
\begin{aligned}
\langle\hat{O}\rangle_t &\equiv {}_t\langle\psi|xz|\psi\rangle_t = 2\,\frac{\sqrt{2}}{3}\cos(\Omega t)\langle 1|\langle 0|\langle 0|xz|0\rangle|0\rangle|1\rangle = \\
&= 2\,\frac{\sqrt{2}}{3}\cos(\Omega t)\langle 1|x|0\rangle\langle 0|0\rangle\langle 0|z|1\rangle = \frac{\sqrt{2}\hbar}{3m\omega}\cos(\Omega t) \qquad (14)
\end{aligned}
$$

Esercizio d'esame 16/09/05

L' Hamiltoniana di una particella di massa m vincolata a muoversi lungo l'asse x è:

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

Lo stato del sistema soddisfa le seguenti condizioni:
a) una misura dell'energia dà certamete un risultato minore di $4\hbar\omega$,
b) è un autostato della parità,
c) $\langle H\rangle = \hbar\omega$,

d) il valor medio di x^2 all'istante iniziale è il minimo possibile.

Determinare in funzione del tempo:

a) il ket di stato,

b) i valori medi dell'impulso e della posizione,

c) (Facoltativo?) i valori medi di x^2 e p^2.

Soluzione

Determiniamo lo stato più generale che soddisfa le condizioni a)-d). Ricordiamo che le energie possibili per un'oscillatore armonico unidimensionale sono:

$$E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\hbar\omega,\ \frac{3}{2}\hbar\omega,\ \frac{5}{2}\hbar\omega,\ \frac{7}{2}\hbar\omega,\ \frac{9}{2}\hbar\omega \ldots \tag{15}$$

Se una misura di energia dà (con probabilitá 1) un risultato minore di $4\hbar\omega$ (condizione a)), il nostro stato può essere combinazione lineare dei soli primi quattro livelli, pertanto:

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle + c|2\rangle + d|3\rangle \tag{16}$$

dove a, b, c, d sono coefficienti complessi, mentre $|n\rangle$ sono gli autostati (normalizzati) dell'oscillatore armonico.

Poichè lo stato é autostato della parità (condizione b)), sono possibili solo combinazioni lineari di stati con la stessa parità, quindi

$$|\psi_+\rangle = a|0\rangle + c|2\rangle, \quad |\psi_-\rangle = b|1\rangle + d|3\rangle \tag{17}$$

autostati della parità con autovalore $+1$ e -1 rispettivamente. La condizione di normalizzazione per questi due stati impone (gli $|n\rangle$ costituiscono un insieme ortonormale, $\langle n|n'\rangle = \delta_{n,n'}$) rispettivamente

$$|a|^2 + |c|^2 = 1, \qquad |c|^2 + |d|^2 = 1 \tag{18}$$

Il valor medio dell'energia sullo stato é $\hbar\omega$ (condizione c)): ogni autovalore (E_n) contribuisce all'energia totale con un peso pari alla probabilità del corrispondente livello ($|n\rangle$) nello stato del sistema ($|\langle n|\psi\rangle|^2$), pertanto si deve avere

$$\begin{aligned} \frac{\hbar\omega}{2}(\ \ |a|^2 + 5|c|^2) &= \hbar\omega \\ \frac{\hbar\omega}{2}(3|b|^2 + 7|d|^2) &= \hbar\omega \end{aligned}$$

Questo ci porta a due sistemi di due equazioni (lineari) per le quantità $|a|^2, |b|^2, |c|^2, |d|^2$:

$$\begin{cases} |a|^2 + \ \ |c|^2 = 1 \\ |a|^2 + 5|c|^2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \ \ |b|^2 + \ \ |d|^2 = 1 \\ 3|b|^2 + 7|d|^2 = 2 \end{cases}$$

Il primo sistema fornisce (ad esempio sottraendo la prima equazione dalla seconda) $|a|^2 = \frac{3}{4}$, $|c|^2 = \frac{1}{4}$, mentre il secondo sistema non ha soluzioni (si ottiene $|d|^2 < 0$); lo stato del nostro sistema é quindi

$$|\psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}\,e^{i\phi}|2\rangle \tag{19}$$

dove ϕ é la fase relativa tra i numeri complessi a e c. Possiamo determinare questa fase (e quindi lo stato in modo completo[1]) sfruttando il fatto che il valore di x^2 sullo stato é minimo (condizione d)). Calcoliamo

$$\begin{aligned} \langle\psi|x^2|\psi\rangle &= \frac{3}{4}\,\langle 0|x^2|0\rangle + \frac{1}{4}\,\langle 2|x^2|2\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4}\,e^{i\phi}\langle 0|x^2|2\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4}\,e^{-i\phi}\langle 2|x^2|0\rangle = \\ &= \frac{3}{4}\frac{\hbar}{2m\omega} + \frac{1}{4}\,5\frac{\hbar}{2m\omega} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\cos\phi\,\sqrt{2}\frac{\hbar}{2m\omega} = \\ &= \frac{\hbar}{4m\omega}\left\{4 + \sqrt{6}\cos\phi\right\} \end{aligned} \tag{20}$$

dove abbiamo fatto uso di:

$$\langle 0|x^2|2\rangle = \langle 2|x^2|0\rangle \tag{21}$$

$$x^2|n\rangle = \frac{\hbar(2n+1)}{2m\omega}\,|n\rangle + \frac{\hbar\sqrt{(n+1)(n+2)}}{2m\omega}\,|n+2\rangle + \frac{\hbar\sqrt{n(n-1)}}{2m\omega}\,|n-2\rangle \tag{22}$$

$$e^{i\phi} + e^{-i\phi} = 2\cos\phi \tag{23}$$

Il valore di $\langle x^2\rangle_\psi$ trovato é evidentemente minimo per $\phi = \pi$; in definitiva, lo stato del sistema é descritto dal ket

$$|\psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|2\rangle \tag{24}$$

Possiamo ora rispondere alle domande proposte:

a) Poichè lo stato (24) é espresso in termini degli autostati dell'energia, l'evoluzione temporale risulta particolarmente semplice da determinare: ogni

[1] A meno di una fase globale inessenziale.

livello $|n\rangle$ evolve con un fattore di fase determinato dall'autovalore corrispondente:

$$
\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= \frac{\sqrt{3}}{2}\, e^{-i\frac{E_0}{\hbar}t}|0\rangle - \frac{1}{2}\, e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}|2\rangle \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\, e^{-i\frac{\omega}{2}t}|0\rangle - \frac{1}{2}\, e^{-i\frac{5\omega}{2}t}|2\rangle \\
&= e^{-i\frac{\omega}{2}t}\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle - \frac{e^{-2i\omega t}}{2}|2\rangle\right\} \\
&\to \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle - \frac{e^{-2i\omega t}}{2}|2\rangle
\end{aligned} \tag{25}
$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo eliminato la fase globale, irrilevante per la fisica del sistema.

b) Per determinare i valori di $\langle\psi(t)|x|\psi(t)\rangle \equiv \langle x(t)\rangle$ e $\langle p(t)\rangle$ possiamo procedere in due modi: calcolando direttamente i valori di aspettazione sullo stato dipendente dal tempo (schema di Schrödinger), oppure trasferendo la dipendenza dal tempo sull'operatore e calcolando i valori medi sullo stato al tempo iniziale (schema di Heisenberg); ricordiamo che, per un generico operatore A che non dipenda esplicitamente dal tempo, vale la:

$$
i\hbar\frac{d}{dt}\langle A(t)\rangle = \langle [A\,,\,H]\rangle \tag{26}
$$

***Nota**: la relazione (26) vale per i valori medi; un'espressione operatoriale per $A(t)$ é fornita da:*

$$
A(t) = e^{\frac{i}{\hbar}Ht}\,A\,e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}
$$

che però non é facilmente calcolabile in modo esplicito nella maggior parte dei casi.

Seguendo il primo metodo, si ha semplicemente:

$$
\langle x(t)\rangle = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\langle 0| - \frac{e^{2i\omega t}}{2}\langle 2|\right) x \left(\frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle - \frac{e^{-2i\omega t}}{2}|2\rangle\right) = 0 \tag{27}
$$

poichè l'operatore x ha valore di aspettazione non nullo solo tra autostati di H che differiscono di una unità, ovvero:

$$
\langle n|x|n'\rangle \propto \delta_{n',n\pm1}
$$

La seconda possibilità ci porta a valutare $\langle[x,H]\rangle$; possiamo procedere sia in termini di operatori x e p, sia in termini di a, $a^\dagger$; nel primo caso si ha

$$
\begin{aligned}
\langle[x,H]\rangle &= \langle\left[x, \frac{1}{2m}\,p^2 + \frac{1}{2}\,m\omega^2 x^2\right]\rangle \\
&= \frac{1}{2m}\,\langle\left[x,p^2\right]\rangle + \frac{1}{2}\,m\omega^2\langle\left[x,x^2\right]\rangle \\
&= \frac{1}{2m}\,\langle\left[x,p^2\right]\rangle = \frac{1}{2m}\,\langle\Big\{p\,\underbrace{[x,p]}_{i\hbar} + \underbrace{[x,p]}_{i\hbar}\,p\Big\}\rangle \\
&= \frac{1}{2m}\,2p\cdot i\hbar \qquad (28)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow i\hbar\langle\dot{x}(t)\rangle = i\hbar\frac{1}{m}\,p(0) \\
&\Rightarrow \langle x(t)\rangle = \langle x(0)\rangle + \frac{1}{m}\,\langle p(0)\rangle\,t \qquad (29)
\end{aligned}
$$

che é ancora nullo per le ragioni esposte sopra (valor medio di coordinata ed impulso nulli su stati a parità definita).

Per derivare questo risultato abbiamo tenuto conto del fatto che ogni operatore commuta con se stesso, quindi con ogni sua potenza e pertanto con ogni sua funzione analitica ed inoltre della proprietà

$$[A,BC] = B\,[A,C] + [A,B]\,C$$

valida per tre operatori A, B, C qualsiasi.

Il secondo caso ci porta a valutare:

$$
\begin{aligned}
\langle[x,H]\rangle &= \langle\left[\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^\dagger + a)\,,\,\hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})\right]\rangle \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\hbar\omega\langle\left[\,a^\dagger + a\,,\,a^\dagger a\,\right]\rangle \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\hbar\omega\langle\left\{\left[\,a^\dagger\,,\,a^\dagger a\,\right] + \left[\,a\,,\,a^\dagger a\,\right]\right\}\rangle \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\hbar\omega\langle\Big\{a^\dagger\,\underbrace{\left[\,a^\dagger\,,\,a\,\right]}_{-1} + \underbrace{\left[\,a^\dagger\,,\,a^\dagger\,\right]}_{0}\,a + a^\dagger\,\underbrace{\left[\,a\,,\,a\,\right]}_{0} + \underbrace{\left[\,a\,,\,a^\dagger\,\right]}_{1}\,a\Big\}\rangle \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\hbar\omega\langle\left(-a^\dagger + a\right)\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\hbar\omega\langle\left(-\frac{1}{i}\sqrt{\frac{2}{m\hbar\omega}}\,p\right)\rangle \\
&= i\hbar\,\frac{1}{m}\,\langle p\rangle \qquad (30)
\end{aligned}
$$

con lo stesso risultato di sopra; in questo procedimento abbiamo ricordato che ogni operatore commuta con l'identità e quindi con ogni operatore ad essa proporzionale.

Può essere utile notare che, se $f(z)$ é una funzione analitica di z, si ha:

$$\begin{aligned}
[x, f(p)] &= \left[x, f_0 + f_1 p + f_2 p^2 + \ldots + f_k p^k + \ldots\right] \\
&= f_1 [x, p] + f_2 \left[x, p^2\right] + \ldots + f_k \left[x, p^k\right] + \ldots \\
&= f_1 [x, p] + f_2 (p [x, p] + [x, p] p) + \ldots \\
&= i\hbar \left\{f_1 + 2 f_2 p + \ldots + k f_k p^{k-1} + \ldots\right\} \\
&= i\hbar f'(p) \qquad (31)
\end{aligned}$$

ed allo stesso modo

$$[p, f(x)] = -i\hbar f'(x) \qquad (32)$$

Per due generici operatori A e B e per ogni f analitica, nei casi in cui $[A, B]$ é (proporzionale ad) un terzo operatore C costante (in particolare l'identità, come nel caso di x e p), vale l'analoga

$$[A, f(B)] = C\, f'(B) \qquad (33)$$

c) Il valor medio di x^2 e p^2 si calcola allo stesso modo, tenendo conto della (22) e dell'analoga:

$$\begin{aligned}
p^2|n\rangle &= \frac{\hbar m\omega(2n+1)}{2}\,|n\rangle + \frac{\hbar m\omega\sqrt{(n+1)(n+2)}}{2}\,|n+2\rangle + \\
&\quad + \frac{\hbar m\omega\sqrt{n(n-1)}}{2}\,|n-2\rangle \qquad (34)
\end{aligned}$$

Il calcolo di x^2 é del tutto analogo a quello svolto nel derivare la (20), con $2\omega t$ al posto di ϕ ed il segno meno relativo tra i due autostati nella (24); si ottiene

$$\langle\psi(t)|x^2|\psi(t)\rangle = \frac{\hbar}{4m\omega}\left\{4 - \sqrt{6}\cos(2\omega t)\right\} \qquad (35)$$

Facendo uso della (34) si ottiene ancora

$$\langle\psi(t)|p^2|\psi(t)\rangle = \frac{\hbar m\omega}{4}\left\{4 + \sqrt{6}\cos(2\omega t)\right\} \qquad (36)$$

E' utile notare che risulta:

$$\frac{1}{2m}\langle p^2(t)\rangle \;+\; \frac{1}{2}m\omega^2\langle x^2(t)\rangle = \frac{1}{2m}\,\frac{\hbar m\omega}{4} + \frac{1}{2}m\omega^2\,\frac{\hbar}{4m\omega} = \hbar\omega = \langle H\rangle_o \equiv \langle H\rangle_t$$

ovvero

$$\langle T\rangle + \langle U\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega = \frac{1}{2}\langle H\rangle \tag{37}$$

con T ed U energia cinetica e potenziale del sistema: pertanto, per l'oscillatore armonico, il contributo medio dell'energia cinetica e di quella potenziale sono indipendenti dal tempo, uguali in valore e pertanto pari a metà dell'energia totale.

Esercizio

Un'oscillatore armonico quantistico di massa m e pulsazione ω si trova, al tempo $t = 0$, nello stato specificato dalle seguenti condizioni:

- Una misura di energia fornisce i due valori più bassi, con uguale probabilità.
- Il valor medio dell'impulso é nullo.
- Il valor medio della posizione é positivo.

Si chiede di:

- Determinare, per $t > 0$, lo stato del sistema, il valor medio della posizione e dell'impulso.
- Verificare le equazioni classiche del moto.

Al tempo $\tau = \frac{8\pi}{\omega}$ la pulsazione dell'oscillatore viene cambiata istantaneamente, $\omega \to \omega' = 3\omega$.

- Determinare, per $t > \tau$, la probabilità di ottenere, in una misura di energia, i valori $\frac{\hbar\omega}{2}$, $\frac{3\hbar\omega}{2}$ e le rispettive probabilità.

Soluzione

L'hamiltoniana del sistema é

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

I livelli energetici sono

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Inoltre indichiamo con $|n\rangle$ i rispettivi autostati,

$$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$$

Determiniamo lo stato del sistema al tempo iniziale: la prima condizione ci dice che lo stato si scrive

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + e^{i\alpha}|1\rangle \Big) \tag{38}$$

La seconda condizione implica

$$
\begin{aligned}
\langle p \rangle_{t=0} &= \frac{1}{2}\Big(\langle 0|p\,|0\rangle + \langle 1|p\,|1\rangle + e^{i\alpha}\langle 0|p\,|1\rangle + e^{-i\alpha}\langle 1|p\,|0\rangle \Big) = \\
&= \frac{1}{2}\,2\,\Re\left\{ e^{i\alpha}\langle 0|p\,|1\rangle \right\} = \\
&= \Re\left\{ e^{i\alpha}\,(-i)\,\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \right\} \propto \sin(\alpha) \stackrel{!}{=} 0 \qquad (39)
\end{aligned}
$$

Dove abbiamo utilizzato il fatto che l'operatore p connette solo autostati dell'oscillatore armonico che differiscono di una unità; in particolare

$$
\begin{aligned}
p &= i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\,\big(a^{+} - a\big) \qquad (40) \\
p|n\rangle &= i\sqrt{\frac{(n+1)m\hbar\omega}{2}}|n+1\rangle - i\sqrt{\frac{nm\hbar\omega}{2}}|n-1\rangle \qquad (41)
\end{aligned}
$$

Pertanto, dalla (39)

$$\alpha = 0, \pi \qquad (42)$$

Per x valgono proprietà analoghe a quelle elencate per p, ovvero

$$
\begin{aligned}
x &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\big(a^{+} + a\big) \qquad (43) \\
x|n\rangle &= \sqrt{\frac{(n+1)\hbar}{2m\omega}}|n+1\rangle - \sqrt{\frac{n\hbar}{2m\omega}}|n-1\rangle \qquad (44)
\end{aligned}
$$

Tenendo conto di queste relazioni, la terza condizione ci porta, con un calcolo assolutamente analogo, a:

$$\langle x \rangle_{t=0} = \Re\left\{ e^{i\alpha}\langle 0|x\,|1\rangle \right\} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\cos(\alpha)\; > \; 0 \qquad (45)$$

Possiamo concludere che

$$\alpha = 0 \qquad (46)$$

Lo stato del sistema a $t = 0$ é ora completamente determinato (a meno di una fase globale irrilevante):

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + |1\rangle \Big) \qquad (47)$$

Poichè lo stato é già scritto nella base propria di $\hat{H}$, l'evoluzione temporale risulta semplicemente

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(e^{-i\frac{E_0}{\hbar}t}|0\rangle + e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}|1\rangle\Big) \\ &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + e^{-i\omega t}|1\rangle\Big) \end{aligned} \tag{48}$$

dove nuovamente abbiamo tralasciato un fattore di fase moltiplicativo.

Per calcolare il valor medio di posizione ed impulso a tempi successivi, possiamo ripercorrere tutti i passaggi precedenti, sostituendo semplicemente α con ωt, ottenendo:

$$\langle p\rangle_t = \Re\left\{e^{-i\omega t}\,(-i)\,\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\right\} = -\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\sin(\omega t) \tag{49}$$

$$\langle x\rangle_t = \Re\left\{e^{-i\omega t}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right\} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\cos(\omega t) \tag{50}$$

che ci permette di scrivere:

$$\frac{d\langle x\rangle_t}{dt} = \frac{1}{m}\,\langle p\rangle_t \tag{51}$$

Questo risultato ha validità generale: i valori medi degli operatori quantistici soddisfano le equazioni classiche del moto.

Per rispondere alle ultime domande, calcoliamo per prima cosa lo stato del sistema all'istante in cui la pulsazione dell'oscillatore viene modificata:

$$|\psi(\tau)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + e^{-i\omega\tau}|1\rangle\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + |1\rangle\Big) \tag{52}$$

Da questo istante in poi, le energie possibili per il sistema sono date da:

$$E_{n'} = \hbar\omega'\left(n' + \frac{1}{2}\right) = 3\hbar\omega\left(n' + \frac{1}{2}\right), \quad n' = 0, 1, \ldots \tag{53}$$

Quindi i primi autovalori della nuova hamiltoniana sono

$$\frac{3\hbar\omega}{2}, \frac{5\hbar\omega}{2}, \frac{7\hbar\omega}{2}, \ldots$$

Pertanto, per tempi t successivi a τ, non é più possibile trovare il valore $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$ in una misura di energia; il valore $E_1 = \frac{3\hbar\omega}{2}$ corrisponde al nuovo stato fondamentale (che indichiamo con $|0'\rangle$), quindi la probabilità cercata é data da:

$$\begin{aligned}\wp(E_1) &= \left|\langle 0'|\psi(t)\rangle\right|^2 = \\ &= \frac{1}{2}\left|\langle 0'|0\rangle + \langle 0'|1\rangle\right|^2 = \\ &= \frac{1}{2}\left|\langle 0'|0\rangle\right|^2 \end{aligned} \tag{54}$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che l'autofunzione corrispondente allo stato fondamentale della nuova hamiltoniana é in ogni caso una funzione pari, mentre $|1\rangle$ é associato ad una funzione dispari; esplicitando

$$\begin{aligned}\langle 0'|0\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{3m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{3m\omega}{2\hbar}x^2}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\,dx = \\ &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} 3^{1/4}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2m\omega}{\hbar}x^2}\,dx = \\ &= \frac{3^{1/4}}{\sqrt{2}}\end{aligned} \tag{55}$$

nella quale abbiamo utilizzato il risultato ben noto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{56}$$

La probabilità richiesta vale

$$\wp(E_1) = \frac{1}{2}\left|\langle 0'|0\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3^{1/4}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \tag{57}$$

Esercizio

L'Hamiltoniana di una particella di massa m è:

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

1. Determinare lo stato $|\psi\rangle$ che soddisfa le seguenti condizioni:
   - una misura dell'energia dà certamete un risultato minore di $3\hbar\omega$;
   - una misura della parità dà certamete il valore $+1$;
   - all'istante iniziale il valor medio $\langle\psi|xp + px|\psi\rangle$ è il massimo possibile.

2. Determinare il valor medio della Hamiltoniana.
3. Determinare in funzione del tempo il valore del prodotto di indeterminazione $\Delta x \Delta p$.

Soluzione

1. Gli autovalori dell'energia per l'oscillatore armonico sono
$$E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\hbar\omega,\ \frac{3}{2}\hbar\omega,\ \frac{5}{2}\hbar\omega,\ \frac{7}{2}\hbar\omega,\ \frac{9}{2}\hbar\omega \ldots$$
pertanto la prima condizione su $|\psi\rangle$ ci dice che dobbiamo considerare solo i primi tre livelli; il fatto che lo stato sia autostato della parità con autovalore $+1$ ci dice invece che $|\psi\rangle$ contiene solo livelli a parità positiva, quindi $|0\rangle$ e $|2\rangle$; possiamo scrivere
$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|2\rangle \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$
Poichè gli stati fisici sono definiti a meno di una fase globale irrilevante, é possibile riscrivere
$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta e^{i\phi}|2\rangle$$
nella quale abbiamo scelto α e β reali (e positivi), esplicitando una fase relativa ϕ; inoltre possiamo scegliere $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ (condizione di normalizzazione).
Sfruttiamo ora l'ultima condizione su $|\psi\rangle$ con un calcolo diretto:
$$[x, p] \equiv xp - px = i\hbar \Rightarrow xp = px + i\hbar$$
e quindi
$$xp + px = 2px + i\hbar$$
Ricordiamo le espressioni esplicite di x e p in termini di a e $a^\dagger$:
$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a^\dagger + a\right), \quad p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(a^\dagger - a\right) \tag{58}$$
Segue
$$\begin{aligned} px &= \frac{i\hbar}{2}\left(a^\dagger - a\right)\left(a^\dagger + a\right) = \\ &= \frac{i\hbar}{2}\left(a^\dagger a^\dagger + \underbrace{a^\dagger a - a a^\dagger}_{-1} - aa\right) \\ &= \frac{i\hbar}{2}\left(a^\dagger a^\dagger - aa\right) - \frac{i\hbar}{2} \end{aligned} \tag{59}$$

dove abbiamo utilizzato

$$\left[a, a^\dagger\right] = 1$$

Possiamo calcolare la media richiesta sullo stato $|\psi\rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle xp + px\rangle &= \langle 2px + i\hbar\rangle = i\hbar\langle\left(a^\dagger a^\dagger - aa\right)\rangle = \\
&= i\hbar\left(\beta e^{-i\phi}\langle 2|a^\dagger a^\dagger|0\rangle\,\alpha - \alpha\langle 0|aa|2\rangle\,\beta e^{i\phi}\right) = \\
&= i\hbar\,\alpha\beta\,\sqrt{2}\left(e^{-i\phi} - e^{i\phi}\right) = 2\sqrt{2}\,\hbar\,\alpha\beta\,\sin\phi \qquad (60)
\end{aligned}$$

dove abbiamo fatto uso di:

$$\begin{aligned}
a|n\rangle &= \sqrt{n}\,|n-1\rangle \\
a^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \\
e^{i\phi} - e^{-i\phi} &= 2i\sin\phi \qquad (61)
\end{aligned}$$

ed abbiamo indicato solo i contributi non nulli.

Ora dobbiamo determinare α, β e ϕ tali che la quantità (60) sia massima, sotto il vincolo $\alpha^2 + \beta^2 = 1$; poichè ϕ é indipendente da α e β si ha subito $\phi = \frac{\pi}{2}$; inoltre é noto[2] che il massimo del prodotto di due numeri positivi, dei quali sia fissata la somma dei quadrati, si ha quando i due numeri sono uguali.

Pertanto $\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\phi = \frac{\pi}{2}$ e lo stato del sistema é

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + i|2\rangle\right) \qquad (62)$$

2. Il valor medio dell'energia sullo stato si ottiene facilmente:

$$E = \langle\mathcal{H}\rangle = \frac{1}{2}\,E_0 + \frac{1}{2}\,E_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{5\hbar\omega}{2}\right) = \frac{3}{2}\,\hbar\omega \qquad (63)$$

3. Dobbiamo calcolare il prodotto di indeterminazione

$$\langle(\Delta x)^2\rangle_t\langle(\Delta p)^2\rangle_t \equiv \left(\langle x^2\rangle_t - \langle x\rangle_t^2\right)\left(\langle p^2\rangle_t - \langle p\rangle_t^2\right)$$

[2] In caso di dubbio, é sufficiente scrivere $\beta = \sqrt{1-\alpha^2}$ e calcolare il massimo di

$$\alpha\beta \to \alpha\sqrt{1-\alpha^2}, \quad 0 < \alpha < 1$$

Sullo stato iniziale (62), il valore medio di x e di p é nullo, perchè questi operatori "connettono" solo autostati che differiscono tra loro di una unità, nel senso che si hanno elementi di matrice $\langle n|x|n'\rangle$ non nulli solo se $n' = n \pm 1$ (analogamente per p), come risulta dalle (58) e (61); poichè inoltre l'evoluzione temporale comporta solo dei fattori di fase diversi per i diversi autostati di $\mathcal{H}$ che intervengono nello stato, senza però cambiare la composizione dello stato, il risultato continua a valere per ogni $t > 0$, pertanto:

$$\langle x\rangle_t^2 \equiv 0, \quad \langle p\rangle_t^2 \equiv 0, \quad \forall t$$

Ci restano così da calcolare

$$\langle\psi(t)|x^2|\psi(t)\rangle\,, \quad \langle\psi(t)|p^2|\psi(t)\rangle$$

con

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\frac{\omega}{2}t}|0\rangle + ie^{-i\frac{5\omega}{2}t}|2\rangle\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + ie^{-2i\omega t}|2\rangle\right) \quad (64)$$

dove (al solito) abbiamo trascurato una fase globale. Possiamo ora procedere al calcolo; ricordando che gli operatori x^2 e p^2 connettono solo autostati di $\mathcal{H}$ tra loro uguali o differenti di due unità, si ha:

$$\begin{aligned}\langle x^2\rangle_t &= \frac{1}{2}\Big\{\langle 0|x^2|0\rangle + \langle 2|x^2|2\rangle + 2\Re\left(ie^{-2i\omega t}\langle 0|x^2|2\rangle\right)\Big\}\\ &= \frac{\hbar}{4m\omega}\Big\{1 + 5 + 2\sqrt{2}\sin(2\omega t)\Big\}\\ &= \frac{\hbar}{2m\omega}\Big\{3 + \sqrt{2}\sin(2\omega t)\Big\} \qquad (65)\end{aligned}$$

Allo stesso modo

$$\begin{aligned}\langle p^2\rangle_t &= \frac{1}{2}\Big\{\langle 0|p^2|0\rangle + \langle 2|p^2|2\rangle + 2\Re\left(ie^{-2i\omega t}\langle 0|p^2|2\rangle\right)\Big\}\\ &= \frac{\hbar m\omega}{4}\Big\{1 + 5 - 2\sqrt{2}\sin(2\omega t)\Big\}\\ &= \frac{\hbar m\omega}{2}\Big\{3 - \sqrt{2}\sin(2\omega t)\Big\} \qquad (66)\end{aligned}$$

pertanto

$$\begin{aligned}\left(\langle(\Delta x)^2\rangle\langle(\Delta p)^2\rangle\right)_t &= \frac{\hbar}{2m\omega}\Big\{3 + \sqrt{2}\sin(2\omega t)\Big\}\frac{\hbar m\omega}{2}\Big\{3 - \sqrt{2}\sin(2\omega t)\Big\}\\ &= \frac{\hbar^2}{4}\Big(9 - 2\sin^2(2\omega t)\Big)\\ &= \frac{\hbar^2}{4}\Big(8 + \cos(4\omega t)\Big) \qquad (67)\end{aligned}$$

Soluzione Primo Esonero di Introduzione alla Meccanica Quantistica del 30/11/2005
Proff. G. Martinelli, S. Caprara

Compito A

Esercizio 1

1. In un sistema quantistico con hamiltoniana

$$\hat{H} = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dove ω é una costante positiva, é definita una grandezza osservabile cui corrisponde l'operatore

$$\hat{A} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

dove α é una costante positiva.

1a. Si dica se esiste un insieme di autoket comuni per i due operatori $\hat{A}$ ed $\hat{H}$. In caso di risposta positiva, determinare tali autoket comuni. Giustificare una eventuale risposta negativa.

1b. Si supponga che all'istante $t = 0$ una misura della grandezza osservabile associata ad $\hat{A}$ abbia dato per risultato il valore più basso possibile. Si determini l'evoluzione temporale del sistema negli istanti successivi, $t > 0$.

1c. Si determini la probabilità di misurare l'autovalore più alto di $\hat{A}$ in funzione del tempo t. Si determini la probabilità di misurare l'autovalore più alto dell'hamiltoniana in funzione del tempo.

Esercizio 2

2. Determinare lo stato quantistico di una particella di spin 1/2 (in unità di $\hbar$), sapendo che la probabilità delle misure dello spin lungo l'asse z sono $\mathcal{P}^z_{+1/2} = 1/16$ e $\mathcal{P}^z_{-1/2} = 15/16$ e che la probabilità di trovare il valore $+1/2$ in una misura di S_x, $\mathcal{P}^x_{+1/2}$, é la massima possibile.

Esercizio 1

1a. $\hat{H}$ e $\hat{A}$ non commutano, pertanto non é possibile trovare una base di autoket comuni.

1b. $\hat{H}$ é costituita da due blocchi diagonali, uno di dimensione 1 ed uno di dimensione 2; in quest'ultimo blocco, la matrice coincide con σ_x, pertanto gli autovalori sono $+\hbar\omega$ (degenere due volte) e $-\hbar\omega$ (non degenere), mentre i corrispondeni autoket sono facilmente:

$$|\hbar\omega, 1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |\hbar\omega, 2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad |-\hbar\omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{68}$$

Gli autovalori di $\hat{A}$ sono invece $\pm\alpha$ e 2α, con relativi autoket:

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |-\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |2\alpha\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{69}$$

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle &= |-\alpha\rangle = \\
&= \Big(\langle\hbar\omega, 1|-\alpha\rangle\Big)|\hbar\omega, 1\rangle + \Big(\langle\hbar\omega, 2|-\alpha\rangle\Big)|\hbar\omega, 2\rangle \\
&\quad +\Big(\langle-\hbar\omega|-\alpha\rangle\Big)|-\hbar\omega\rangle = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}|\hbar\omega, 1\rangle - \frac{1}{2}|\hbar\omega, 2\rangle - \frac{1}{2}|-\hbar\omega\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega t}|\hbar\omega, 1\rangle - \frac{1}{2}e^{-i\omega t}|\hbar\omega, 2\rangle - \frac{1}{2}e^{i\omega t}|-\hbar\omega\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}|\hbar\omega, 1\rangle - \frac{1}{2}|\hbar\omega, 2\rangle - \frac{1}{2}e^{2i\omega t}|-\hbar\omega\rangle
\end{aligned}$$

1c.

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(\hat{A} \to +2\alpha, t) &= \Big|\langle 2\alpha|\psi(t)\rangle\Big|^2 \\
&= \left|\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(e^{2i\omega t} - 1\right)\right|^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(1 - \cos 2\omega t\right) = \frac{1}{2}\sin^2 \omega t
\end{aligned} \tag{70}$$

$$\mathcal{P}(\hat{H} \to \hbar\omega, t) = \mathcal{P}(|\hbar\omega, 1\rangle, t) + \mathcal{P}(|\hbar\omega, 2\rangle, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \tag{71}$$

Esercizio 2

$$|\psi\rangle = \frac{1}{4}\Big| + \frac{1}{2}\rangle + \frac{\sqrt{15}}{4}\, e^{i\gamma}\Big| - \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{15}\, e^{i\gamma} \end{pmatrix} \tag{72}$$

$$|S_x = \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{73}$$

$$\langle S_x = \frac{1}{2}|\psi\rangle = \frac{1}{4\sqrt{2}}\,(1 + \sqrt{15}\, e^{i\gamma}) \tag{74}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^x_{+1/2} &= \frac{1}{32}\Big[(1 + \sqrt{15}\cos\gamma)^2 + 15\sin^2\gamma\Big] \\ &= \frac{1}{32}\Big[16 + 2\sqrt{15}\cos\gamma\Big] \end{aligned}$$

Questa espressione é max per $\cos\gamma = 1$ ovvero $\gamma = 0$: lo stato del sistema é pertanto

$$|\psi\rangle = \frac{1}{4}\Big| + \frac{1}{2}\rangle + \frac{\sqrt{15}}{4}\Big| - \frac{1}{2}\rangle \tag{75}$$

COMPITO B

Esercizio 1

1. In un sistema quantistico é definita una grandezza osservabile cui corrisponde l'operatore $\hat{O} = \vec{p}\cdot\vec{\sigma}$, dove

$$\vec{p} = (p_x,\ p_y,\ p_z) = p\,(\sin\theta\cos\phi,\ \sin\theta\sin\phi,\ \cos\theta)$$

é un vettore costante, $p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} > 0$ é il modulo del vettore $\vec{p}$, mentre $\vec{\sigma} = (\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z)$ é il vettore delle matrici di Pauli:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{76}$$

1a. Si dimostri che gli autovalori di $\vec{O}$ sono $\pm p$ e si determinino i corrispondenti autoket $|\psi_\pm\rangle$.

1b. Si supponga che all'istante $t = 0$ una misura dell'osservabile associato all'operatore $\vec{O}$ abbia dato il valore $-p$. Determinare l'evoluzione temporale del sistema negli istanti successivi, sapendo che l'hamiltoniana del sistema é $\vec{H} = -\hbar\alpha\sigma_x$, con α costante positiva.

1c. Si determinino i valori medi di σ_x e σ_z in funzione del tempo. Si commenti il risultato.

Esercizio 2

2. Determinare lo stato quantistico di una particella di spin 1/2 (in unità di $\hbar$), sapendo che la probabilità delle misure dello spin lungo l'asse z sono $\mathcal{P}^z_{+1/2} = 4/9$ e $\mathcal{P}^z_{-1/2} = 5/9$ e che la probabilità di trovare il valore $+1/2$ in una misura di S_x, $\mathcal{P}^x_{+1/2}$, é la minima possibile.

SOLUZIONE

Esercizio 1

1a.

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} = p \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = \pm p \tag{77}$$

Per $\lambda = -p$:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta + 1 & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{78}$$

$$\Rightarrow \alpha\left(\cos\theta+1\right)+\beta\sin\theta e^{-i\phi}=0\Rightarrow\alpha=-\frac{\sin\theta e^{-i\phi}}{\cos\theta+1}\beta \tag{79}$$

Ricordando

$$\begin{aligned} 1+\cos\theta &= 2\cos^2(\theta/2) \\ 1-\cos\theta &= 2\sin^2(\theta/2) \end{aligned}$$

$$\alpha=-\frac{2\sin\left(\theta/2\right)\cos\left(\theta/2\right)e^{-i\phi}}{2\cos^2(\theta/2)}\beta=-\frac{\sin\left(\theta/2\right)e^{-i\phi}}{\cos\left(\theta/2\right)}\beta \tag{80}$$

ed é possibile scegliere $\beta=\cos\left(\theta/2\right)$, quindi

$$|-p\rangle=\begin{pmatrix} -\sin\left(\theta/2\right)e^{-i\phi} \\ \cos\left(\theta/2\right) \end{pmatrix} \tag{81}$$

che risulta già normalizzato; allo stesso modo:

$$|+p\rangle=\begin{pmatrix} \cos\left(\theta/2\right) \\ \sin\left(\theta/2\right)e^{i\phi} \end{pmatrix} \tag{82}$$

1b.

$$\begin{aligned} |\psi(t=0)\rangle &= |-p\rangle \\ \hat{H} &= -\hbar\alpha\hat{\sigma}_x \end{aligned} \tag{83}$$

pertanto gli autovalori dell'hamiltoniana sono $-\hbar\alpha$ e $+\hbar\alpha$, mentre i relativi autoket sono

$$|-\hbar\alpha\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad |+\hbar\alpha\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{84}$$

$$\begin{aligned} |\psi(0)\rangle &= |-p\rangle = \\ &= (\langle-\hbar\alpha|-p\rangle)|-\hbar\alpha\rangle+(\langle+\hbar\alpha|-p\rangle)|+\hbar\alpha\rangle= \\ &= +\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(-\sin\left(\theta/2\right)e^{-i\phi}+\cos\left(\theta/2\right)\Big)|-\hbar\alpha\rangle+ \\ &\quad +\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(-\sin\left(\theta/2\right)e^{-i\phi}-\cos\left(\theta/2\right)\Big)|+\hbar\alpha\rangle \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(-\sin(\theta/2)e^{-i\phi} + \cos(\theta/2)\Big)\, e^{-i\alpha t}|-\hbar\alpha\rangle + \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(-\sin(\theta/2)e^{-i\phi} - \cos(\theta/2)\Big)\, e^{i\alpha t}|+\hbar\alpha\rangle \\
&= -\begin{pmatrix} \sin(\theta/2)\cos(\alpha t)e^{-i\phi} - i\cos(\theta/2)\sin(\alpha t) \\ i\sin(\theta/2)\sin(\alpha t)e^{-i\phi} - \cos(\theta/2)\cos(\alpha t) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

1c. Poichè $\hat{\sigma}_x$ commuta con $\hat{H}$, il suo valor medio non dipende dal tempo e può essere anche calcolato sullo stato iniziale:

$$\langle\psi(t)|\hat{\sigma}_x|\psi(t)\rangle \equiv \langle\psi|\hat{\sigma}_x|\psi\rangle = \langle -p|\hat{\sigma}_x|-p\rangle = \tag{85}$$

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} -\sin(\theta/2)e^{i\phi} & \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2)e^{-i\phi} \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix} = \\
&= -\sin\theta\cos\phi
\end{aligned} \tag{86}
$$

mentre

$$\langle\psi(t)|\hat{\sigma}_z|\psi(t)\rangle = \sin\theta\sin\phi\sin 2\alpha t - \cos\theta\cos(2\alpha t) \tag{87}$$

Esercizio 2

$$|\psi\rangle = \frac{2}{3}\Big| +\frac{1}{2}\rangle + \frac{\sqrt{5}}{3}\,e^{i\gamma}\Big| -\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5}\,e^{i\gamma} \end{pmatrix} \tag{88}$$

$$|S_x = \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{89}$$

$$\langle S_x = \frac{1}{2}|\psi\rangle = \frac{1}{3\sqrt{2}}\,(2 + \sqrt{5}\,e^{i\gamma}) \tag{90}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^x_{+1/2} &= \frac{1}{18}[(2+\sqrt{5}\cos\gamma)^2 + 5\sin^2\gamma] \\
&= \frac{1}{18}[9 + 4\sqrt{15}\cos\gamma]
\end{aligned}$$

Questa espressione é min per $\cos\gamma = -1$ ovvero $\gamma = \pi$: lo stato del sistema é pertanto

$$|\psi\rangle = \frac{2}{3}\Big| + \frac{1}{2}\rangle - \frac{\sqrt{5}}{3}\Big| - \frac{1}{2}\rangle \tag{91}$$

16/12/2005
Proff. S. Caprara, M. Cassandro, M. Falcioni G. Martinelli, A. Pugliese

Esercizio n. 1

Sia dato un sistema fisico descritto da due stati che, in una base assegnata, indichiamo come $|1\rangle$ e $|2\rangle$. Il sistema è descritto da un'Hamiltoniana $\hat{H}$, indipendente dal tempo, i cui elementi di matrice sono $\langle 1|\hat{H}|1\rangle = 0$, $\langle 2|\hat{H}|2\rangle = E$, $\langle 1|\hat{H}|2\rangle = e^{i\pi/4}\sqrt{2}\,E$ e E è un parametro reale e positivo.

1. Descrivere l'evoluzione temporale del sistema nel caso in cui lo stato iniziale sia
$$|\psi\rangle_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)\,;$$
2. Sotto le stesse ipotesi di cui al punto precedente, scrivere e risolvere le equazioni del moto per gli operatori $\mathcal{O}_1 = |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|$ e $\mathcal{O}_2 = -i\,(|1\rangle\langle 2| - |2\rangle\langle 1|)$ e commentare il risultato.

Soluzione dell'Esercizio n. 1

L'Hamiltoniana è un operatore Hermitiano e pertanto deve valere la relazione $\langle 2|\hat{H}|1\rangle = \langle 1|\hat{H}|2\rangle^*$:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\pi/4}\sqrt{2}\,E \\ e^{-i\pi/4}\sqrt{2}\,E & E \end{pmatrix} . \tag{92}$$

L'equazione secolare per trovare gli autovalori

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & e^{i\pi/4}\sqrt{2}\,E \\ e^{-i\pi/4}\sqrt{2}\,E & E-\lambda \end{pmatrix} = 0\,, \tag{93}$$

è data da

$$\lambda^2 - \lambda\,E - 2E^2\,, \tag{94}$$

che ha come soluzioni $\lambda^+ = 2E$ e $\lambda^- = -E$, a cui corrispondono i due autovettori:

$$|v^+\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \\ \sqrt{\frac{2}{3}}\,e^{-i\pi/4} \end{pmatrix} , \qquad |v^-\rangle = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{2}{3}}\,e^{i\pi/4} \\ \\ \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} . \tag{95}$$

Questi vettori soddisfano le condizioni $\langle v^+|v^+\rangle = \langle v^-|v^-\rangle = 1$ e $\langle v^+|v^-\rangle = \langle v^-|v^+\rangle = 0$. Si noti che qualunque ridefinizione degli autovettori, ottenuta moltiplicando le soluzioni in eq. (95) per un fattore complesso arbitrario, darà sempre autovettori dell'Hamiltoniana corrispondenti agli stessi autovalori e ortogonali tra loro. Tra tutte le scelte possibili è tuttavia conveniente lavorare con una base di vettori ortonormali, ovvero di modulo unitario. In questo modo possiamo scrivere l'operatore identità come

$$\hat{I} = |v^+\rangle\langle v^+| + |v^-\rangle\langle v^-|\,. \tag{96}$$

Questo ci consente di decomporre immediatamente lo stato all'istante $t = 0$, $|\psi\rangle_{t=0}$, come combinazione lineare degli autostati dell'Hamiltoniana.

Utilizzando per gli autovettori le espressioni date in eq. (95), otteniamo

$$|\psi\rangle_{t=0} = \hat{I}\,|\psi\rangle_{t=0} = |v^+\rangle\langle v^+|\psi\rangle_{t=0} + |v^-\rangle\langle v^-|\psi\rangle_{t=0} = C^+\,|v^+\rangle + C^-\,|v^-\rangle\,, \tag{97}$$

con

$$\begin{aligned} C^+ &= \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{3}} = \frac{2+i}{\sqrt{6}} \\ C^- &= \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{3}} = \frac{i}{\sqrt{6}}\,. \end{aligned} \tag{98}$$

Lo stato all'istante t generico si ricava immediatamente dalla decomposizione in eq. (97)

$$|\psi\rangle_t = C^+\,e^{-i2Mt/\hbar}\,|v^+\rangle + C^-\,e^{iMt/\hbar}\,|v^-\rangle\,. \tag{99}$$

Da questa espressione si calcolano immediatamente i valori medi degli operatori $\mathcal{O}_1$ e $\mathcal{O}_2$ in funzione del tempo. Tenendo conto che ${}_t\langle\psi|\psi\rangle_t = 1$, otteniamo

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1(t) ={}_t\langle\psi|\mathcal{O}_1|\psi\rangle_t &= \frac{1}{9}\left(4 + 5\cos\left(\frac{3Mt}{\hbar}\right)\right) \\ \mathcal{O}_2(t) ={}_t\langle\psi|\mathcal{O}_2|\psi\rangle_t &= \frac{1}{9}\left(-4 + 4\cos\left(\frac{3Mt}{\hbar}\right) - 3\sin\left(\frac{3Mt}{\hbar}\right)\right)\,. \end{aligned} \tag{100}$$

Come atteso dall'espressione dello stato all'istante $t = 0$, se poniamo $t = 0$ nelle (100), otteniamo $\mathcal{O}_1(0) = 1$ e $\mathcal{O}_2(0) = 0$.

Esercizio n. 2

L' hamiltoniana di una particella di massa m è:

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2.$$

Al tempo $t = 0$ la sua funzione d'onda normalizzata è:

$$\psi(x, t = 0) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{8}{23}}(\xi^3 - i)\, e^{-\frac{\xi^2}{2}},$$

dove $\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$.
a) Determinare i possibili risultati di una misura dell'energia, le rispettive probabilità e il valor medio dell'hamiltoniana.
b) Determinare in funzione del tempo i valori medi degli operatori $\hat{x}$ e $\hat{p}$ e commentare il risultato.

Si consiglia di svolgere tutti i conti utilizzando la coordinata x nelle unità adimensionali ξ.

NOTA BENE: le autofunzioni normalizzate dell'oscillatore armonico sono

$$u_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{H_n(\xi)}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

i primi polinomi di Hermite sono:

$$H_0(\xi) = 1, \quad H_1(\xi) = 2\xi,$$

$$H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2, \quad H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi.$$

Soluzione dell'Esercizio n. 2

Lo stato all'istante $t = 0$ è proporzionale a un polinomio di terzo grado in x moltimplicato per la gaussiana caratteristica delle autofunzioni dell'oscillatore armonico. Pertanto lo stato all'istante iniziale, $|\psi\rangle_{t=0}$ ($\psi(x, t = 0) = \langle x|\psi\rangle_{t=0}$) non può che essere una combinazione degli autostati dell'hamiltoniana $|0\rangle \ldots |3\rangle$ corrispondenti agli autovalori $E = \hbar\omega/2\,(1, 3, 5, 7)$:

$$|\psi\rangle_{t=0} = C_0\,|0\rangle + C_1\,|1\rangle + C_2\,|2\rangle + C_3\,|3\rangle\,, \tag{101}$$

con

$$C_n = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, u_n^*(x)\, \psi(x, t = 0)\,. \qquad (102)$$

Si può evitare di calcolare gli integrali che determinano i coefficienti, costruendo un sistema di equazioni lineari per i coefficienti delle funzioni $u_n(x)$ tali che il coefficiente di ξ^3 sia uguale a 1 e il coefficiente del termine costante sia uguale a $-i$. In entrambe i casi la soluzione è

$$\begin{aligned} C_0 &= -i\sqrt{\frac{8}{23}}\,, \qquad C_1 = \sqrt{\frac{9}{23}}\,, \\ C_2 &= 0,\,, \qquad C_3 = \sqrt{\frac{6}{23}}\,, \end{aligned} \qquad (103)$$

con $|C_0|^2 + |C_1|^2 + |C_3|^2 = 1$.

I valori possibili di una misura di energia sono dunque $E = \hbar\omega/2$, $E = 3\hbar\omega/2$ e $E = 7\hbar\omega/2$ con probabilità 8/23, 9/23 e 6/23 rispettivamente. Il calcolo del valore medio è a questo punto immediato

$$\bar{E} = \frac{8}{23}\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{9}{23}\frac{3\hbar\omega}{2} + \frac{6}{23}\frac{7\hbar\omega}{2} = \frac{77\hbar\omega}{46}\,. \qquad (104)$$

Lo stato del sistema all'istante t generico sarà dato dall'espressione

$$|\psi\rangle_t = e^{-i\omega t/2}\left(C_0\,|0\rangle + e^{-i\omega t}\,C_1\,|1\rangle + e^{-i3\omega t}\,C_3\,|3\rangle\right)\,. \qquad (105)$$

Per il calcolo dei valori medi della posizione e dell'impulso in funzione del tempo è conveniente utilizzare le espressioni di $\hat{x}$ e $\hat{p}$ in termini degli operatori di creazione e distruzione $a^\dagger$ e a

$$\hat{x} = \frac{x_0}{\sqrt{2}}(a^\dagger + a) \qquad \hat{p} = \frac{i\hbar}{\sqrt{2}x_0}(a^\dagger - a)\,, \qquad (106)$$

con $x_0 = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$. Gli unici elementi di matrice non nulli sono quelli che collegano autostati dell'hamiltoniana che differiscono di una unità. Nel caso della funzione d'onda in esame, è necessario dunque calcolare solo gli elementi di matrice tra gli stati $|0\rangle$ e $|1\rangle$

$$\begin{aligned}\bar{x} &= {}_t\langle\psi\frac{x_0}{\sqrt{2}}(a^\dagger + a)|\psi\rangle_t = \frac{x_0}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\omega t}C_0^*C_1\langle 0|a|1\rangle + e^{+i\omega t}C_1^*C_0\langle 1|a^\dagger|0\rangle\right) \\ &= ix_0\sqrt{\frac{36}{23^2}}\left(e^{-i\omega t} - e^{+i\omega t}\right) = x_0\frac{12}{23}\sin\omega t\,. \end{aligned} \tag{107}$$

Similmente

$$\begin{aligned}\bar{p} &= {}_t\langle\psi|\frac{i\hbar}{\sqrt{2}x_0}(a^\dagger - a)|\psi\rangle_t = \frac{i\hbar}{\sqrt{2}x_0}\left(-e^{-i\omega t}C_0^*C_1\langle 0|a|1\rangle + e^{+i\omega t}C_1^*C_0\langle 1|a^\dagger|0\rangle\right) \\ &= i\frac{\hbar}{x_0}\sqrt{\frac{36}{23^2}}\left(-i\,e^{-i\omega t} - i\,e^{+i\omega t}\right) = \frac{\hbar}{x_0}\frac{12}{23}\cos\omega t\,. \end{aligned} \tag{108}$$

Si noti che

$$m\frac{d\bar{x}}{dt} = mx_0\omega\frac{12}{23}\cos\omega t = \sqrt{m\omega\hbar}\frac{12}{23}\cos\omega t = \bar{p}\,. \tag{109}$$

Esercizio n. 3

Due particelle identiche di spin 1/2 e massa m sono vincolate a muoversi sulla superfice di una sfera di raggio R. La loro Hamiltoniana è:

$$H = \frac{1}{2mR^2}(L_1^2 + L_2^2 + 2\vec{L}_1\cdot\vec{L}_2 + \vec{S}_1\cdot\vec{S}_2) \tag{110}$$

dove $\vec{L}_1, \vec{L}_2, \vec{S}_1, \vec{S}_2$ sono rispettivamente i momenti angolari orbitali e di spin delle particelle 1 e 2.

Al tempo $t = 0$ una misura di L_1^2 e di L_2^2 dà con certezza $2\hbar^2$ per entrambe le particelle; una misura di L_{1z} e L_{2z} dà con certezza $+\hbar$ per una particella e $-\hbar$ per l'altra; una misura di S_{1z} e S_{2z} dà con certezza $+\frac{1}{2}\hbar$ per una particella e $-\frac{1}{2}\hbar$ per l'altra.

1. Determinare il più generale stato che soddisfa le condizioni precedenti.

2. Per lo stato di cui al punto (a), determinare, al tempo $t = 0$, i possibili risultati di una misura di $(L_T)_z$, $(S_T)_z$, $(J_T)_z$ e le rispettive probabilità, dove $\vec{L}_T = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$, $\vec{S}_T = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ e $\vec{J}_T = \vec{L}_T + \vec{S}_T$.

3. Determinare completamente lo stato di cui al punto (a) imponendogli di essere autostato di H.

4. Per lo stato di cui al punto (c), determinare in funzione del tempo i possibili risultati di una misura di L_T^2, S_T^2, J_T^2 e le loro probabilità.

Soluzione dell'Esercizio n. 3

Le due particelle sono in uno stato di momento angolare orbitale $l_{1,2} = 1$ e pertanto il momento angolare totale può assumere i valori $2, 1, 0$. Inoltre una particella deve avere momento angolare lungo l'asse z opposto all'altra. Questo lascia solo due possibilità, una simmetrica e una antisimmetrica rispetto alo scambio delle due particelle;

$$\begin{aligned} |S\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}|2,0,1,1\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|0,0,1,1\rangle\,, \\ |A\rangle &= |1,0,1,1\rangle\,, \end{aligned}$$

dove i quattro indici corrispondono al momento angolare totale, il momento angolare totale lungo l'asse z, e i momenti angolari delle due particelle ispettivamente. D'altro canto per lo stato di spin le sole due combinazioni possibili, corrispondenti allo spin delle due particelle in due direzioni opposte lungo l'asse z, sono

$$\begin{aligned} |s\rangle &= |1,0,1/2,1/2\rangle\,, \\ |a\rangle &= |0,0,1/2,1/2\rangle\,. \end{aligned}$$

Uno stato che soddisfi tutte le condizioni richieste e possieda la corretta simmetria rispetto allo scambio dei due fermioni ha la forma

$$|\psi\rangle = \alpha\, |S\rangle |a\rangle + \beta\, |A\rangle |s\rangle\,, \tag{111}$$

con $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Questo stato è un autostato del momento angolare orbitale totale lungo l'asse z con autovalore 0 e similmente per lo spin totale e il momento angolare totale. Dunque una misura di queste quantità darà zero con probabilità $P = 1$.

Per determinare completamente lo stato imponendo che sia un autostato dell'Hamiltoniana conviene riscrivere quest'ultima utilizzando le relazioni:

$$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{(\vec{S}_T^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2)}{2} = \frac{\vec{S}_T^2}{2} - \frac{3\hbar^2}{4} \tag{112}$$

e dunque

$$H = \frac{\hbar^2}{2mR^2}\left(l(l+1) + \frac{s(s+1)}{2} - \frac{3}{4}\right) \tag{113}$$

dove l e s si riferiscono ai multipletti per il momento angolare totale e lo spin totale, rispettivamente.

Gli stati che entrano in eq. (111), e i corrispondenti valori dell'energia, sono

$$\begin{aligned}
&|0,0,1,1\rangle|0,0,1/2,1/2\rangle \qquad E_1 &=& -\frac{3\hbar^2}{8mR^2}\\
&|2,0,1,1\rangle|0,0,1/2,1/2\rangle \qquad E_2 &=& \frac{21\hbar^2}{8mR^2}\\
&|1,0,1,1\rangle|1,0,1/2,1/2\rangle \qquad E_3 &=& \frac{9\hbar^2}{8mR^2}\,,
\end{aligned} \tag{114}$$

per cui l'unica possibilità per avere un autostato dell'energia è che sia $\alpha = 0$ e $\beta = 1$. Lo spin totale e il momento angolare totale che sono costanti del moto (commutano con l'Hamiltoniana), corrispondono in entrambi i casi a $l = 1$ e $s = 1$ con probabilità $P = 1$. Scrivendo lo stato al tempo t generico e utilizzando la notazione $|j, j_z, l, s\rangle$ abbiamo

$$|\psi\rangle_t = e^{-iE_3 t/\hbar} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} |2, 0, 1, 1\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |0, 0, 1, 1\rangle \right) \tag{115}$$

da cui si deduce che i valori possibili sono $j = 2$ e $j = 0$ con probabilità $2/3$ e $1/3$ rispettivamente, indipendenti dal tempo perchè lo stato è stazionario e dunque la fase che dipende dal tempo si cancella nel calcolo di tutte le probabilità.