

# Astrofisica e particelle elementari

aa 2007-08

Lezione 2

Bruno Borgia

# Cosmologia newtoniana

Ricordiamo:

$$d^2R/dt^2 = -GM/R^2 \quad \text{eq. del moto}$$

$$\text{dove } M = (4/3) \pi R(t)^3 \rho(t)$$

equazione di conservazione dell'energia:

$$[(dR/dt)/R]^2 = H(t)^2 = -kc^2/R^2 + 8\pi/3 G \rho(t)$$

parametro di decelerazione

$$q(t) = -[(d^2R/dt^2) / R] / [(dR/dt) / R]^2 = -[(d^2R/dt^2) / R] / H(t)^2$$

$$\text{con il valore attuale } q_0 = 4/3 \pi G \rho_0 / H_0^2$$

dove  $\rho_0$  è la densità di materia ad oggi

# Densità di energia

Soluzione delle equazioni di Einstein assumendo un universo isostropico e omogeneo:

$$H^2 = - Kc^2/R^2 + 8\pi/3 G \rho \quad (*)$$

$$H=(dR/dt)/R$$

Il termine  $Kc^2/R^2$  è il termine di curvatura ed il parametro di curvatura  $K$  può assumere i valori 0, 1, -1.

Ovvero differenziando e imponendo la conservazione dell'energia

$$(d^2R/dt^2)/R = - (4/3 \pi G) (\rho + 3p/c^2)$$

$$\text{con } \rho_{\text{tot}} = \rho_m + \rho_r$$

Se si aggiunge un termine  $\Lambda/3 = (8\pi/3) G\rho_v$  a destra della (\*), con  $\Lambda$  costante cosmologica, per  $R$  sufficientemente grandi si ha:

$$dR/R = (\Lambda/3)^{1/2} dt$$

ovvero  $R \propto \exp[(\Lambda/3)^{1/2} t]$ , l'espansione diventa esponenziale.

Si ha quindi

$$\rho_{\text{tot}} = \rho_m + \rho_r + \rho_v$$

dove  $\rho_v = \Lambda/ 8\pi G$

# Costante cosmologica

Per  $K = 0$ , la (\*) dà il valore per la densità critica che chiude l'Universo:

$$\rho_c = 3H_0^2/8\pi G = 5.1 \text{ GeV m}^{-3}$$

Il rapporto  $\rho/\rho_c$  si chiama parametro di chiusura. Dalla (\*), per  $t_0$  e per  $K$  qualunque si ha

$$\Omega = \rho_{\text{tot}}/\rho_c = 1 + Kc^2/[H_0R(0)]^2$$

Ritroviamo che per  $K = 0$ ,  $\Omega = 1$ .

La costante cosmologica  $\Lambda$  può essere interpretata nel quadro della teoria quantistica dei campi in termini di densità di energia del vuoto. Il principio di indeterminazione richiede che il vuoto contenga particelle-antiparticelle che si manifestino per un tempo tale che  $\Delta t \Delta E \geq h$ . Di conseguenza il vuoto può possedere una densità di energia attraverso le coppie particelle antiparticelle che si manifestano temporaneamente.

Il parametro di decelerazione  $q(t)$  si può anche scrivere come

$$q = (4\pi G/3c^2H^2)[\rho c^2 + 3p] = \Omega_m/2 + \Omega_r - \Omega_v$$

Trascurando la densità di radiazione, perché attualmente molto piccola, una costante  $\Lambda=0$  porta ad una decelerazione dell'Universo e per  $K=0$ ,

$$\Omega_m = 1 \text{ e } q = 0.5.$$

Ma se  $\Lambda$  è sufficientemente grande, si ha una accelerazione dell'espansione e l'energia del vuoto avrebbe l'effetto di una gravitazione repulsiva.

# Densità di energia (2)

I contributi alla densità, ovvero al parametro di chiusura  $\Omega$  si possono identificare con:

- $\Omega_{\text{rad}}$ : al tempo presente la densità di radiazione è trascurabile

$$\Omega_{\text{rad}} \approx 5 \times 10^{-5}$$

- $\Omega_{\text{lum}}$ : materia barionica luminosa (protoni, neutroni, nuclei che formano stelle, gas e polveri). Si calcola  $\Omega_{\text{lum}} \approx 0.01$

- $\Omega_{\text{bar}}$ : materia barionica totale, visibile o invisibile, come calcolata dalla nucleosintesi,  $\Omega_{\text{bar}} \approx 0.05$

- $\Omega_{\text{m}}$ : densità totale di materia come si calcola dal potenziale gravitazionale delle galassie e dalla cinematica delle strutture a grande scala dell'Universo.  $\Omega_{\text{m}} \approx 0.30$

- $\Omega_{\text{v}}$ : densità di energia del vuoto, stimata dal plot di Hubble (velocità vs distanza) per supernove a grandi red-shift e dalle fluttuazioni del fondo di radiazione cosmica.  $\Omega_{\text{v}} \approx 0.70$

La maggior parte della materia dell'Universo non è visibile e i barioni sono solo il 15% della materia. I non-barioni sono circa l'85% e sono definiti *materia oscura*.

Il termine di curvatura può essere espresso analogamente con

$$\Omega_k = -Kc^2/[H_0^2R(0)^2]$$

# Età dell'Universo

L'equazione di Friedmann si può mettere nella forma:

$$H(t)^2 = 8\pi/3 G[\rho_m(t) + \rho_r(t) + \rho_v(t) + \rho_k(t)]$$

dove  $\rho_k = -(3/8\pi) Kc^2/GR^2$ ; ovvero

$$H(t)^2 = H_0^2 [\Omega_m(0)(1+z)^3 + \Omega_{rad}(0)(1+z)^4 + \Omega_v(0) + \Omega_k(0)(1+z)^2]$$

usando  $R(0)/R(t) = (1+z)$  e le dipendenze da R di  $\rho$  per la materia ( $\propto R^{-3}$ ), la radiazione ( $\propto R^{-4}$ ) ed il termine di curvatura ( $\propto R^{-2}$ ).

La dipendenza della densità della radiazione da R ha un fattore  $1/R$  in più dovuto al red shift.

$$1/R dR/dt = H = -[(dz/dt)/(1+z)]$$

$$\text{cioè } dt = - dz/H(1+z)$$

che integrata da  $z=0$  a  $z$  dà  $t_0 - t = 1/H_0 \cdot \int dz/(1+z)H(t)$ .

Per calcolare l'età dell'Universo si pone  $t=0$  e l'estremo superiore dell'integrale si pone  $z \rightarrow \infty$ .

L'integrale si può calcolare anche analiticamente nel caso  $K=0$ ,  $\Omega_{rad} \ll 1$ ,  $\Omega_m = 0.30 = \Omega$ ,  $\Omega_v = 0.70 = 1 - \Omega$  con la sostituzione

$$\Omega(1+z)^3/(1-\Omega) = \tan^2\theta; \quad \sin 2\theta = 2\tan\theta/(\tan^2\theta+1).$$

Infine si trova  $t_0 = (13.5 \pm 2)$  Gyr.

# Radiazione cosmica di fondo (CMB)

Nelle prime fasi dell'espansione dell'Universo, raffreddato alla temperatura di  $10^9$  K, neutroni e protoni possono iniziare a formare i nuclei degli elementi chimici. A questa temperatura il deutone non è più distrutto dall'interazione con i fotoni. Possono cominciare a formarsi atomi e molecole.

In seguito l'accoppiamento fotoni-materia diventa così debole che la radiazione può solo raffreddarsi espandendosi adiabaticamente con l'Universo. Gamov nel 1948 diede una prima stima della temperatura attuale della radiazione primordiale  $\approx 10$ K.

# Radiazione di fondo

R.H.Dicke, P.J.E.Pebbles, P.G.Roll nel 1964 iniziarono la ricerca della radiazione, ma furono preceduti da A.A.Penzias e R.R.Wilson che nel 1965 per caso scoprirono una debole radiazione a 4.08 GHz. Fu immediatamente riconosciuta come la “radiazione cosmica” anche perché segue la legge di Planck

$$B_\nu(T) = 2h\nu^3 / \{c^2 [\exp(h\nu/kT) - 1]\} \quad \text{radiazione di corpo nero}$$

alla temperatura di 2.7K, non polarizzata e isotropa. La sola anisotropia nasce dal moto della Terra relativo al sistema solidale con il fondo cosmico, come risultato dell'effetto Doppler, con aumento della temperatura in direzione del moto:

$T(\theta)/T_0 = [1 - (v/c)^2]^{1/2} / [1 - (v/c)\cos\theta] \approx 1 + (v/c)\cos\theta$ . Conoscendo il valore massimo di  $T(\theta)/T_0$  per  $\theta \approx 0$ , si ottiene la velocità della Terra trascinata dal Sole nella sua rotazione attorno al centro della Galassia

$$v \approx (371 \pm 0.5) \text{ Km/s}$$

Rispetto al centro di massa del Gruppo Locale, la velocità è

$$v \approx 630 \text{ Km/s}$$

# Radiazione di fondo: T

La densità di materia oggi domina rispetto alla densità di radiazione. Ma a tempi sufficientemente brevi dal Big Bang e dimensioni  $R$  sufficientemente piccole, dominava la densità di radiazione. Assumendo la conservazione della materia, la densità di materia varia con  $R^{-3}$ . La densità di radiazione varia con  $R^{-4}$ . Il fattore  $R^{-1}$  in più deriva dall'effetto Doppler che diminuisce la frequenza. A tempi brevi la densità del vuoto, costante con  $R$ , era trascurabile rispetto alla densità di materia. Di conseguenza l'equazione di Friedmann si può ridurre a

$$(dR/dt)^2 = (8\pi G/3)\rho_{rad}R^2$$

Inoltre poiché  $\rho_{rad} \propto R^{-4}$

$$\frac{\dot{\rho}_{rad}}{\rho_{rad}} = -4\frac{\dot{R}}{R} = -4\left(\frac{8\pi G\rho_{rad}}{3}\right)^{1/2} = -4H(t)$$

che integrata dà  $\rho_{rad}c^2 = (3c^2/32\pi G)/t^2$

Un gas di fotoni in equilibrio termico segue la legge di Stefan

$$\rho_{rad}c^2 = 4\sigma T^4/c$$

dove  $\sigma$  è la costante di Stefan-Boltzmann. Dalle due ultime equazioni si ottiene  $T$  in funzione di  $t$ , ovvero

$$kT \approx 1.31\text{MeV} / t^{1/2}. \quad (**)$$

Per  $t_0 \approx 14 \text{ G yr} \approx 10^{18} \text{ s}$ ;  $kT \approx 1 \text{ meV} \rightarrow$  qualche kelvin.

# Numero di fotoni; T vs t

Lo spettro del numero di fotoni di energia  $E=pc=h\nu$  è dato dalla distribuzione di Bose Einstein (v. Planck) che integrata dà

$$N_\gamma = 411 (T/2.7)^3 = 411 \text{ cm}^{-3}$$

$$\Omega_{\text{rad}} = 5.05 \times 10^{-5}$$

La relazione (\*\*) tra T e t si scrive per esteso come:

$$kT = \left( \frac{45h^3c^5}{32\pi^3G} \right)^{1/4} \times \left( \frac{2}{g_\gamma} \right)^{1/4} \times \frac{1}{t^{1/2}} \quad (\#)$$

dove  $g_\gamma$  è il numero di stati di spin del fotone.

I fermioni relativistici, supposti stabili, contribuiscono anch'essi alla densità di energia. La distribuzione del numero di fermioni nell'intervallo  $p$ - $p+dp$  segue la distribuzione di Fermi Dirac:

$$N(p)dp = \frac{p^2 dp}{\pi^2 h^3 \{ \exp(E/kT) + 1 \}} \times \frac{g_f}{2}$$

## T vs t (2)

dove  $g_f$  è il numero di stati di spin ed  $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ .

Nel limite relativistico  $kT \gg mc^2$  e  $E=pc$ , la densità di energia dovuta ai fermioni è

$$\rho_f c^2 = \frac{7}{8} \cdot \frac{\pi^4}{15} \cdot \frac{(kT)^4}{\pi^4 h^3 c^3} \cdot \frac{g_f}{2}$$

Per una miscela di bosoni e fermioni relativistici il fattore  $g_\gamma$  è sostituito da

$$g^* = \sum g_b + \frac{7}{8} \sum g_f$$

dove la sommatoria si estende su tutte le particelle e antiparticelle che contribuiscono alla densità di energia di radiazione nell'universo primitivo. Allo stato della conoscenza attuale gli stati fermionici che contribuiscono sono 90 e gli stati bosonici 28.

Occorre tener conto dei quark in tre famiglie, del colore, degli stati di spin che per una particella con massa sono  $2J+1$ . Inoltre dei leptoni carichi e dei neutrini. Per i bosoni, oltre i fotoni, a  $T$  sufficientemente alte contribuiscono i gluoni e i bosoni  $W^\pm$  e  $Z$ . Infine contribuisce anche il bosone di Higgs.

# T vs t

Utilizzando la relazione

$$H(t) = -\frac{\dot{\rho}}{4\rho} = \frac{1}{2t}$$

e la relazione (#), si ha

$$H(T) = \frac{\dot{R}}{R} = \left[ \frac{4g^* \pi^3 G}{45h^3 c^5} \right]^{1/2} \cdot (kT)^2$$

# Radiazione e materia

Dalla relazione  $kT \approx 1.31 \text{ MeV} / t^{1/2}$  è chiaro che quando le temperature e le densità di particelle erano estremamente alte, i fermioni ed i bosoni erano in equilibrio termico fra di loro ed in numero comparabile, finché  $kT \gg mc^2$ . L'equilibrio termico si mantiene se l'intervallo tra un urto ed il seguente è inferiore all'età dell'universo, altrimenti non ci sono sufficienti urti per mantenere l'equilibrio. Quindi occorre che la frequenza di collisioni  $w = \langle Nv\sigma \rangle$  sia  $\gg 1/t$ .

$\sigma$  è la sezione d'urto del processo

$N$  è la densità delle particelle bersaglio

$v$  è la velocità della particella

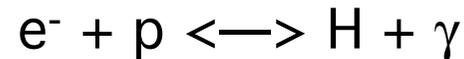
Se la sezione d'urto dipende dall'energia, con il diminuire di  $T$ ,  $\sigma$  potrebbe diventare così piccola che  $w$  diventa  $< 1/t$ . A quell'istante il processo non si mantiene in equilibrio e le particelle si “disaccoppiano” dalle altre.

Ad esempio  $e^+ + e^- \longleftrightarrow \nu + \text{antiv}$  per  $kT < 3\text{MeV}$ , i neutrini si disaccoppiano dalla materia e si espandono indipendentemente.

Per particelle massive si ha il processo di annichilazione tra particella-antiparticella, ma non il processo inverso:  $p^+ + p^- \longleftrightarrow \gamma + \gamma$ .

# Radiazione e materia

Dopo circa  $10^5$  anni dal Big Bang, la materia consiste essenzialmente di protoni, elettroni e atomi di idrogeno in equilibrio con i fotoni:



Calcolando le probabilità di elettroni legati nell'atomo di idrogeno e quelli liberi, secondo le distribuzioni di Boltzmann, si calcola il rapporto delle densità

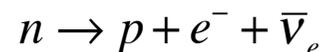
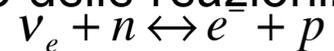
$$\frac{N_e N_p}{N_H} = \frac{x^2}{1-x} = \frac{1}{N_e} \left( \frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} \exp\left(\frac{-1}{kT}\right)$$

con  $x$  = frazione di atomi di idrogeno ionizzati. Il potenziale di ionizzazione dell'idrogeno è  $I=13.6$  eV.

Per una temperatura compresa tra 0.35 e 0.25 eV, il valore di  $x$  è molto piccolo e quindi radiazione e materia si disaccoppiano a queste temperature. Confrontando questo valore con 2.7 K ( $2.35 \times 10^{-4}$  eV), si trova  $1+z = kT_{\text{dis}}/kT_0 = 1250$ . Con la correzione del doppio assorbimento di due fotoni si trova  $1+z = 1100$ .

# Nucleosintesi (1)

Quando l'universo raggiunge la temperatura di 100 MeV al tempo  $t > 10^{-4}$ s, tutti gli adroni con l'eccezione dei protoni, neutroni e loro antiparticelle sono decaduti e quindi scomparsi. Nucleoni e antinucleoni presenti in egual numero cominceranno ad annichilarsi in radiazione. Una piccola frazione sopravvive per formare l'Universo attuale. Il numero relativo di protoni e neutroni è il risultato delle reazioni:



A queste temperature i nucleoni non sono relativistici e quindi si può applicare la distribuzione di Boltzmann e il rapporto sarà:

$$\frac{N_n}{N_p} = \exp\left(\frac{-Q}{kT}\right)$$

dove  $Q = (m_n - m_p)c^2 = 1.29$  MeV.

Le prime due reazioni si disaccoppiano quando  $w/H < 1$ . Tenendo conto di come variano le sezioni d'urto e la velocità di espansione dell'universo, il congelamento avviene a  $kT = 0.80$  MeV e quindi il rapporto iniziale è  $N_n/N_p = 0.20$ .

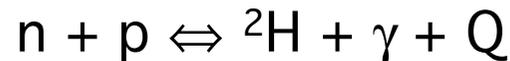
## Nucleosintesi (2)

A tempi successivi, i neutroni scompariranno a causa del decadimento debole in protoni con un rapporto funzione di t:

$$\frac{N_n}{N_p} = \frac{0.20 \exp(-t/\tau)}{1.20 - 0.20 \exp(-t/\tau)}$$

dove  $\tau = 887 \pm 2$  s è la vita media del neutrone libero.

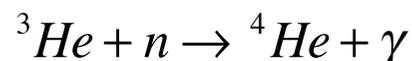
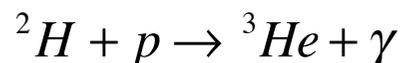
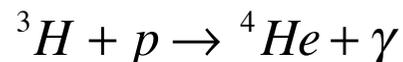
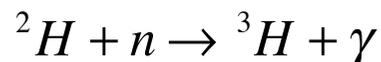
Neutroni e protoni possono però produrre deutoni



con  $Q=2.2$  MeV, energia di legame. Questa è una reazione elettromagnetica con sezione d'urto grande, 0.1 mb, e quindi si sostiene in equilibrio termico per un tempo molto lungo.

Poiché i fotoni sono molto più abbondanti dei nucleoni, i deutoni sono congelati quando  $kT < Q/40 \approx 0.05$  MeV. Appena i deutoni sono congelati, intervengono processi competitivi con produzione di elio.

## Nucleosintesi (3)



Tenendo conto che nella relazione T vs t interviene il fattore  $g^{*1/2}$ , che a sua volta dipende dal numero di neutrini=3, si calcola il tempo di disaccoppiamento  $t \approx 300\text{s}$  e quindi il rapporto neutroni/protoni diventa  $r = 0.135$

Il numero di nuclei di He che si formano è pari al numero di neutroni/2, con  $N_p - N_n$  in avanzo. L'abbondanza di He, in numero di nuclei è:

$$\frac{N_{\text{He}}}{N_{\text{H}}} = \frac{N_n}{2(N_p - N_n)}$$

ovvero in massa ( $m_{\text{He}} \approx 4m_n$ )

$$Y/X \approx \frac{2N_n}{N_p - N_n} = \frac{2r}{1-r}$$

con  $X+Y=1$ , ovvero

$$Y = \frac{2r}{1+r} = 0.24$$

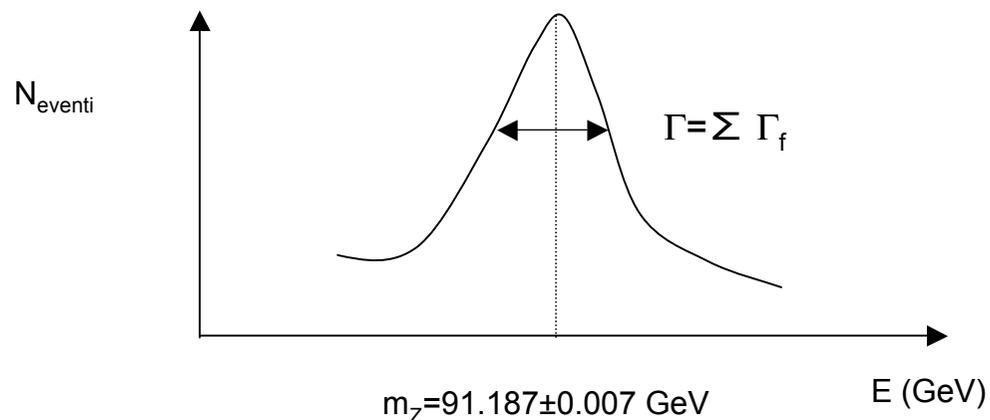
I valori sperimentali sono 0.23-0.24.

# Nucleosintesi (4): n. neutrini

Poiché la scala temporale dell'espansione dipende dal fattore di spin  $g^{*-2}$ , ovvero dal numero di bosoni e fermioni fondamentali, aumentando il numero di neutrini, aumenta  $g^*$  e aumenta la temperatura di disaccoppiamento  $T_F$ . Di conseguenza aumenta il rapporto iniziale  $r$ =neutroni/protoni, ovvero aumenta la frazione di elio.

Questo argomento veniva usato per stabilire il numero massimo di neutrini prima delle misure di LEP.

Gli esperimenti a LEP hanno dimostrato, attraverso la misura della larghezza della risonanza Z, che  $N_\nu = 2.983 \pm 0.025$ .



# Bariogenesi (1)

La nucleosintesi dà conto non solo dell'abbondanza di He, ma anche della presenza di elementi leggeri come  $^2\text{H}$ ,  $^3\text{H}$ ,  $^7\text{Li}$ , assai più abbondanti che se fossero prodotti nelle reazioni termonucleari delle stelle.

La densità del numero di barioni calcolata è  $N_B = 0.18 \pm 0.09 \text{ m}^{-3}$ .

Confrontando col numero di fotoni del fondo cosmico  $N_\gamma = 411 \text{ cm}^{-3}$ , si ha

$$N_B / N_\gamma \approx (4 \pm 2) 10^{-10}$$

Una frazione estremamente piccola.

Mentre a tempi brevi dal Big Bang il numero di barioni doveva essere confrontabile col numero di fotoni, l'annichilazione particella-antiparticella ha fatto scomparire la maggior parte dei nucleoni, lasciando solo una frazione inferiore ad una particella per miliardo.

Mentre inizialmente il numero di barioni doveva essere  $\approx$  al numero di antibarioni, oggi troviamo che il rapporto  $N_{\text{antiB}}/N_B < 10^{-4}$ .

Il congelamento del processo  $p^+ + p^- \longleftrightarrow \gamma + \gamma$  avviene quando la densità di barioni diventa troppo piccola, a seconda della sezione d'urto di annichilazione e della velocità di espansione dell'universo.

# Bariogenesi

Assumendo che inizialmente il numero di barioni e antibarioni sia nullo, e che nell'espansione dell'Universo si stabilisca un equilibrio termico della reazione  $p^+ + p^- \longleftrightarrow \gamma + \gamma$ , il numero dei barioni e antibarioni alla temperatura  $T$  sarà dato dall'integrale della distribuzione di Fermi:

$$N_B = N_{\bar{B}} = \frac{(kT)^3}{\pi^2(\hbar c)^3} \int_0^{\infty} \frac{(pc/kT)^2 d(pc/kT)}{\exp(E/kT) + 1}$$

Nell'espansione dell'Universo, la frequenza del processo inverso all'annichilazione sarà sempre più rara perché anche i fotoni con energie nella coda della distribuzione non avranno energia sufficiente.

Inoltre la densità dei nucleoni sarà così bassa che anche la reazione diretta sarà sempre più rara. Con la densità dei nucleoni, la sezione d'urto di annichilazione in funzione dell'energia e l'espansione dell'Universo si può calcolare la temperatura critica e quindi la densità dei nucleoni al congelamento. Si ha:

$$kT(\text{critica}) = 20 \text{ MeV}; \quad \frac{N_B}{N_\gamma} = \frac{N_{\bar{B}}}{N_\gamma} \approx 10^{-18}$$

# Bariogenesi (2)

Al contrario come abbiamo visto i barioni sono circa  $10^{-9}$  rispetto ai fotoni e gli antibarioni sono circa  $10^{-4}$  rispetto ai barioni.

Se si suppone che inizialmente siano stati presenti barioni, il loro numero dovrebbe essere stato assai grande  $\approx 10^{79}$ .

Una possibilità è stata suggerita da Sakharov nel '67, basata sulla violazione del numero barionico. Le condizioni necessarie per giungere all'asimmetria materia-antimateria attuale, sono tre:

- interazioni con violazione del numero barionico
- stati di non equilibrio
- violazione di CP e di C.

La prima condizione porta al decadimento del protone, il cui limite sperimentale per la vita media è  $>10^{33}$  anni.

La seconda condizione è imposta dal fatto che nucleone e antinucleone hanno la stessa massa, di conseguenza all'equilibrio termico non possono che avere densità uguali.

La terza condizione è necessaria per distinguere l'antimateria dalla materia su scala cosmica.

# Antimateria

La ricerca dell'antimateria si basa su metodi diretti e indiretti.

Se l'antimateria avesse una densità confrontabile alla densità della materia, si potrebbero osservare i fotoni dell'annichilazione come radiazione quasi monocromatica. Ma questi fotoni non si osservano.

L'osservazione diretta non può che avvenire nello spazio in quanto gli antibarioni entrando nell'atmosfera darebbero immediatamente luogo all'annichilazione e quindi non più osservabili direttamente.

# Search for Antimatter in Primary Cosmic Rays

A. BUFFINGTON, L. H. SMITH, G. F. SMOOT &  
L. W. ALVAREZ

Space Sciences Laboratory, University of California, Berkeley

M. A. WAHLIG

Lawrence Berkeley Laboratory, University of California