Astrofisica e particelle elementari

aa 2007-08

Lezione 4

Bruno Borgia

Rotazioni

- Rotazioni spaziali con angolo ϕ intorno all'asse z.
- Un vettore r nel piano xy fa un angolo ϕ con l'asse x. Nella rotazione di $\delta\phi$, le coordinate cartesiane subiscono un incremento pari a

$$\delta x = -r \sin\phi \delta\phi = -y\delta\phi$$

$$\delta y = r \cos\phi \delta\phi = x\delta\phi$$

$$L' \textit{effetto della rotazione sulla funzione } \psi :$$

$$R(\phi,\delta\phi)\psi(x,y,z) = \psi(x,y,z) + \delta x\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \delta y\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) =$$

$$= \psi\left[1 + \left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\delta\phi\right] = \psi\left[1 + \delta\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right]$$

L'operatore della componente z del momento angolare è definito da

$$J_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

Una rotazione finita è ottenuta da n incrementi infinitesimi

$$R = \lim_{n\to\infty}\left(1 + iJ_z\frac{\delta\phi}{\hbar}\right)^n = \exp\left(iJ_z\frac{\Delta\phi}{\hbar}\right)$$

J_z è chiamato il generatore della rotazione finita $\Delta\phi$

Rotazioni

- Un insieme di rotazioni di un sistema forma un gruppo e ciascuna rotazione è un elemnto del gruppo. Due rotazioni successive sono equivalenti ad una singola rotazione R_2R_1. L'elemento identità rappresenta nessuna rotazione. Il gruppo delle rotazioni è un gruppo continuo, ovvero ciascuna rotazione è caratterizzata da parametri continui.
- Ciascuna rotazione può essere espressa dal prodotto di rotazioni infinitesime.
- Poiché il risultato di un esperimento non deve dipendere dall'orientamento del laboratorio, le rotazioni debbono formare un gruppo di simmetria del sistema.
- Sotto la trasformazione R il sistema si trasforma

$$i\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|U|\psi(t)\rangle =$$

$$|\psi\rangle \to |\psi'\rangle \to U|\psi\rangle$$

$$\left|\langle\phi|\psi\rangle\right|^2 = \left|\langle\phi'|\psi'\rangle\right|^2 = \left|\langle\phi|U^\dagger U|\psi\rangle\right|^2$$

Ovvero la probabilità che un sistema descritto da $|\psi>$ si trasformi nello stato $|\phi>$ non deve cambiare per la rotazione R. Quindi U è un operatore unitario.

Invarianza per rotazioni

- L'Hamiltoniana non cambia per la rotazione R e gli elementi di matrice sono preservati. L'equazione del moto non cambia per la rotazione R e quindi il valore di aspettazione di U è una costante del moto.

$$\langle \phi' | H | \psi' \rangle = \langle \phi | U^{\dagger} H U | \psi \rangle = \langle \phi | H | \psi \rangle$$

quindi

$$H = U^{\dagger} H U \qquad ovvero \qquad [U, H] = UH - HU = 0$$

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle$$

$$i \frac{d}{dt} \langle \psi(t) | U | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t) | UH - HU | \psi(t) \rangle = 0$$

Poiché nella rappresentazione di Heisenberg si ha

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{i}{\hbar}(TH - HT) \text{ per le grandezze non esplicitamente dipendenti da } t$$

Parità

- L'inversione delle coordinate spaziali è una trasformazione discreta che opera sulla funzione d'onda, ovvero $P\psi(\mathbf{r}) = \psi(-\mathbf{r})$ e $P^2=1$. Gli autovalori di P dovranno essere ±1. Questi valori definiscono la parità del sistema.
- Nelle interazioni elettromagnetiche e forti la parità è conservata, ovvero la parità dello stato finale è uguale alla parità dello stato iniziale.
- Nelle interazioni deboli la parità è violata. Nel 1956 C.S. Wu e collaboratori dimostrarono la violazione della parità nel decadimento del Co^{60} in $e^- \gamma$.
- Un sistema di due particelle identiche è descritto da una funzione d'onda prodotto della funzione spazio e di spin:

$$\psi = \chi(\text{spazio})\ \alpha(\text{spin})$$

Con $\chi(r,\theta,\phi) = \xi(r) Y^m_l(\theta,\phi)$

Y^m_l è la funzione armonica sferica di momento angolare l e componente z m.

Sotto l'inversione di parità, $\theta \rightarrow (\pi - \theta)$ e $\phi \rightarrow (\pi + \phi)$ e si ha

$$Y^m_l(\pi-\theta,\pi+\phi) = (-1)^l\ Y^m_l(\theta,\phi)$$

Parità di due fermioni e del π

- 2 fermioni identici hanno $\alpha(S, S_z)$ con S: spin totale e $S_z = 0, \pm 1$
- Gli stati possibili sono $(2s+1)^2$:

$\alpha(1,+1)$	$\uparrow\uparrow$
$\alpha(1,-1)$	$\downarrow\downarrow$
$\alpha(1,0)$	$(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)/\sqrt{2}$
$\alpha(0,0)$	$(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)/\sqrt{2}$

Le prime tre funzioni d'onda sono simmetriche rispetto allo scambio delle due particelle, mentre la quarta è antisimmetrica. Quindi la funzione di spin ha parità $(-1)^{S+1}$.

La funzione d'onda totale sotto lo scambio di coordinate e di spin cambia segno come $(-1)^{l+S+1}$

- La parità intrinseca del π^- è determinata dalla reazione in onda s (l=0)

$$\pi^- + d \rightarrow n + n$$

Il π^- ha spin 0 ed il deutone spin 1, quindi nello stato iniziale J = 1 e anche nello stato finale. Poiché i neutroni sono fermioni, debbono essere in uno stato antisimmetrico e quindi avere L+S pari.

L'unica possibilità è L=1, S=1. (*verificare*).

La parità dello stato finale è quindi -1.

Poiché le parità intrinseche dei nucleoni si cancellano nello stato iniziale e finale, il π deve avere parità intrinseca -1.

- Particella e antiparticella hanno parità intrinseche opposte.

Coniugazione di carica

- La coniugazione di carica C inverte il segno della carica ed il momento magnetico della particella senza alterare le altre coordinate.
- Le equazioni di Maxwell sono invarianti per il cambiamento di segno della carica e della corrente e quindi le interazioni em sono invarianti sotto C. Il π^0 decade in due fotoni e poiché il fotone ha C=-1, in quanto la corrente j cambia segno per C, lo stato finale avrà $C=(-1)^2=1$. Il decadimento del π^0 è un processo elettromagnetico che avviene con una vita media $\tau=(8.4 \pm 0.6) \times 10^{-17}$ s. Quindi C deve essere conservato. Di conseguenza il π^0 ha C=+1.
- Anche le interazioni forti sono invarianti per C. L'invarianza si basa su due postulati verificati sperimentalmente: la simmetria di carica e l'indipendenza dalla carica. La simmetria di carica è verificata ad esempio nei nuclei "specchio" di carica Z e Z+1 ma con lo stesso numero totale di neutroni e protoni. Ad esempio le energie di legame dei nuclei ^3H e ^3He ovvero dei nuclei ^{13}C e ^{13}N sono le stesse, tenuto conto delle forze coulombiane.
- Le interazioni deboli non sono invarianti per coniugazione di carica.

CPT

- Le operazioni di coniugazione di carica C, di inversione di parità P e inversione temporale sono connesse dalla invarianza in qualunque interazione sotto le tre operazioni C, P e T prese in qualunque ordine. Teorema CPT.
- Il teorema CPT predice che le masse, i momenti magnetici, le vite medie delle particelle e delle antiparticelle sono identiche. Ciò è verificato sperimentalmente con grande accuratezza in diversi casi.
- Mentre CPT è universale, non lo sono separatamente C, P. Non lo è neanche CP e quindi T.

Violazione di CP

- La violazione di CP è stata osservata per la prima volta nel decadimento del K neutro.
- Esistono due stati neutri
  - $K_S = (K^0 + \text{anti } K^0)\sqrt{1/2}$ τ=0.089 ns CP = +1
  - $K_L = (K^0 - \text{anti } K^0)\sqrt{1/2}$ τ=51.7 ns CP = -1

con la convenzione $CP|K^0\rangle = |\text{anti } K^0\rangle$

- Christenson, Cronin, Fitch, Turlay nel 64 osservarono una piccola violazione ($\approx 10^{-3}$) di CP nel decadimento del K_L.
- Infatti una piccola frazione di K_L decade in 2π che hanno CP=+1. La violazione è anche apparente nel decadimento leptonico.
- Sia R^+ la frequenza di decadimento $K_L \rightarrow e^+ \nu_e \pi^-$; R^- la frequenza di $K_L \rightarrow e^-$ anti-ν_e π^+ , si ha

$$(R^+ - R^-)/(R^+ + R^-) = (3.3\pm0.1) \times 10^{-3}$$

- Esiste quindi un modo per distinguere le cariche senza ambiguità:

  l'elettrone positivo è il leptone più frequente nel decadimento del K_L

- L'origine della violazione di CP nel decadimento del K può essere nello stato iniziale con vita media definita che non è uno stato puro di CP, *violazione indiretta*, oppure può avvenire nel decadimento stesso, *violazione diretta*.
- Evidentemente la violazione di CP ha una grande rilevanza in astrofisica per la manifesta assenza di antimateria. Il problema è se il livello di violazione di CP osservato è sufficiente a spiegare l'asimmetria materia-antimateria.