

# Astrofisica e particelle elementari

aa 2008-9

Lezione 3

Particelle

Interazioni

Sezioni d'urto

Simmetrie e invarianze

Bruno Borgia

# Adroni e leptoni

Possiamo distinguere le particelle *stabili* in due grandi categorie: adroni e leptoni

- Adroni: nuclei, protone, neutrone (stabile se legato nel nucleo)
- Leptoni: elettrone, positrone, neutrino
  
- Gli adroni sono particelle “composite”
- I leptoni sono particelle “puntiformi”
  
- La scoperta dei quark, particelle costituenti gli adroni, è avvenuta attraverso un processo sperimentale e teorico partendo dalla scoperta di numerose “risonanze” che hanno suggerito un modello basato sulla combinazione di 3 elementi. Successivamente gli esperimenti di diffusione ep a SLAC alla “Rutherford” hanno identificato costituenti elementari del protone e del neutrone: i partoni. I partoni venivano identificati a loro volta con i quark. La conferma è avvenuta con gli esperimenti all’anello di accumulazione Adone ed agli altri anelli.

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}$$

# Quark e colore

Nome	Spin	B	L	Q
u	1/2	1/3	0	+2/3
d	1/2	1/3	0	-1/3
e	1/2	0	1	-1
$\nu$	1/2	0	1	0
$\gamma$	1	0	0	0
W	1	0	0	$\pm 1$
Z	1	0	0	0
g	1	0	0	0

Quark	Massa	Leptoni	Massa
u	330 MeV	e	0.51 MeV
d	330 MeV	$\nu_e$	< 4 eV
c	1.5 GeV	$\mu$	105.6 MeV
s	0.5 GeV	$\nu_\mu$	< 0.25 MeV
t	175 GeV	$\tau$	1780 MeV
b	5 GeV	$\nu_\tau$	< 35 MeV

- Spin e statistica:  $|\psi|^2$  è indipendente dallo scambio tra due particelle identiche.
- per una coppia di bosoni  $\psi \rightarrow \psi$
- per una coppia di fermioni  $\psi \rightarrow -\psi$
- Nello stesso stato quantico possono trovarsi due bosoni, ma non due fermioni
- Gell-Mann Zweig hanno proposto il modello a quark con tre costituenti di base.
- Il quark  $u$  ha tre versioni con le “cariche” di colore rosso, blu e verde (R,B,G). Poiché la simmetria di colore è esatta, le masse dei quark colorati sono esattamente le stesse. In natura le particelle sono “bianche” e quindi sono combinazioni appropriate dei colori o dei colori complementari: grigio-azzurro (ciano), magenta, giallo ( $\bar{R}, \bar{G}, \bar{B}$ )

$$p : RGB$$

$$\bar{p} : \bar{R}\bar{G}\bar{B}$$

$$\pi : R\bar{R} + G\bar{G} + B\bar{B}$$

# Antiparticelle

- L'equazione di Klein Gordon si ottiene dalla relazione energia-momento relativistica sostituendo ad  $E$  e  $\mathbf{p}$  gli operatori differenziali:

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2$$
$$\frac{-\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \nabla^2 \phi = m^2 \phi$$

- Gli autovalori dell'energia sono

$$E = \pm(\vec{p}^2 + m^2)^{1/2}$$

ovvero con energia negativa e densità di probabilità negativa

Dirac ha ottenuto per i fermioni quattro soluzioni di cui due descrivono un fermione di spin 1/2 con  $E > 0$  e  $t_1 \rightarrow t_2$ , due con  $E < 0$  e  $t_2 \rightarrow t_1$ .

Le soluzioni ad energia negativa sono interpretabili con un fermione di carica opposta che viaggia nella direzione positiva con energia positiva.

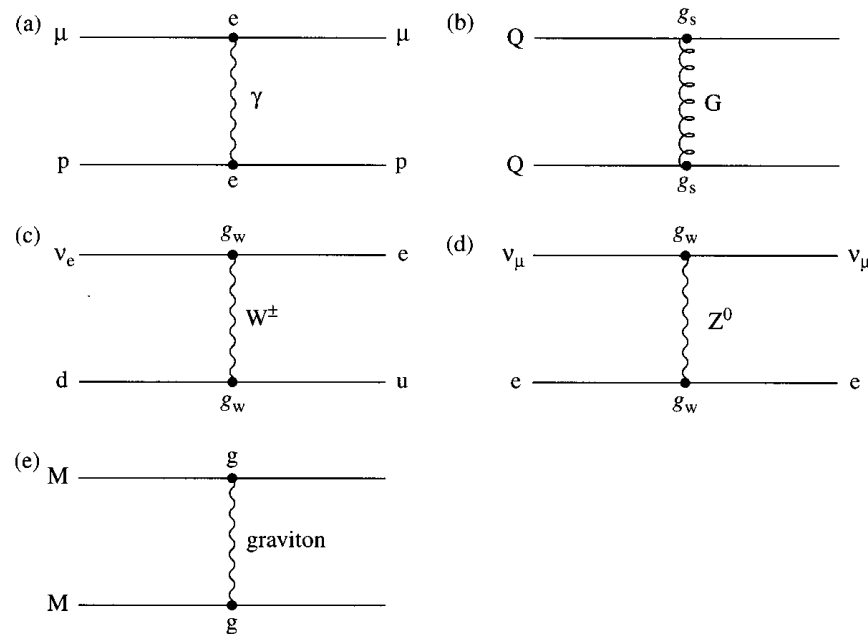
I fermioni sono creati e distrutti in coppie particella-antiparticella. Ad esempio in un collider si ha  $e^+ e^- \rightarrow \gamma + \gamma$ . Anche  $\gamma (N) \rightarrow e^+ e^-$ .

# Interazioni fondamentali

- Le interazioni tra leptoni e quark avvengono tramite lo scambio di un bosone mediatore caratteristico di ogni tipo di interazione.

Interazione	Mediatore	Massa	Intensità relativa	Q
elettromagnetica	fotone	0	$10^{-2}$	0
forte	gluone	0	1	0 (colore!)
debole	W Z	80-92 GeV	$10^{-7}$	$\pm 1$ 0
gravitazionale	gravitone	0 (spin 2)	$10^{-39}$	0

Le interazioni sono rappresentate graficamente dai seguenti diagrammi.



# Scambio del bosone

- Nell'interazione di un elettrone con un altro elettrone attraverso lo scambio di un fotone, l'elettrone cede al fotone un'energia  $\Delta E$  ed un momento  $\Delta p$ . Si ha

$$E^2 = p^2 + m^2 \quad c = 1$$

$$\Delta E \cdot E = \Delta p \cdot p$$

$$\Delta m^2 = \Delta E^2 - \Delta p^2 = -\frac{m^2 \Delta p^2}{E^2} < 0$$

- Il fotone ha massa immaginaria ed energia  $\Delta E$  per un tempo  $\Delta t$  tale che  $\Delta E \Delta t < h/2\pi$ .
- La quantità  $\Delta m^2$  è definita nel sistema di riferimento del fotone scambiato ed è quindi relativisticamente invariante. Si chiama momento trasferito quadrato e si indica con  $q^2$ .
- Se  $\Delta E$  è grande, il raggio d'azione dell'interazione è piccolo perché  $c\Delta t < h/2\pi E$ , come avviene nelle interazioni deboli, data la massa del W e dello Z.
- Yukawa ha mostrato che il potenziale di interazione dovuto ad un bosone a spin 0 di massa M ha la forma

$$V(r) \propto \left(\frac{1}{r}\right) \exp\left(\frac{-r}{r_0}\right) \quad \text{con } r_0 = \frac{hc}{2\pi M c^2}$$

- Poiché il raggio d'azione effettivo delle forze nucleari è dell'ordine di  $1 \text{ fm} = 10^{-13} \text{ cm}$ , Yukawa predisse la massa del mesone  $\approx 200 \text{ MeV}/c^2$ .

$$\hbar = 6.6 \times 10^{-25} \text{ GeV s}$$

# Propagatore

- L'ampiezza di scattering di una particella contro un'altra particella è proporzionale alle costanti di accoppiamento delle particelle con il bosone mediatore ed al propagatore che caratterizza le proprietà del bosone.

- Interazione elettromagnetica  $e^2=4\pi\alpha\hbar c$  (in unità naturali)= $4\pi\alpha$   $\alpha\approx 1/137$

- Interazione forte  $\alpha_s(Q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2n_f)\log(Q^2 / \Lambda^2)}$

- Interazione debole  $G_F = g_W^2 / (-q^2 + M_W^2) = 1.17 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$ ;  $g_W = e$

- Interazione gravitazionale  $GM^2/4\pi\hbar c = 5.3 \times 10^{-40}$

massa di Planck  $M_P = (\hbar c/G)^{1/2} = 1.2 \times 10^{19} \text{ GeV}/c^2 \approx 2 \times 10^{-2} \text{ mg}$

lunghezza di Planck  $L_P = \hbar/M_P = 1.6 \times 10^{-35} \text{ m} = 1.6 \times 10^{-20} \text{ fm}$

# Propagatore

- Dall'equazione di Klein Gordon per un potenziale statico e radialmente simmetrico si ricava la soluzione già anticipata per  $V(r)$ .
- L'ampiezza di scattering sarà la trasformata di Fourier del potenziale. Il risultato è

$$f(q^2) = [gg_0/(m^2-q^2)]$$

$g$ : costante di accoppiamento col potenziale;

$g_0$ : costante integrazione

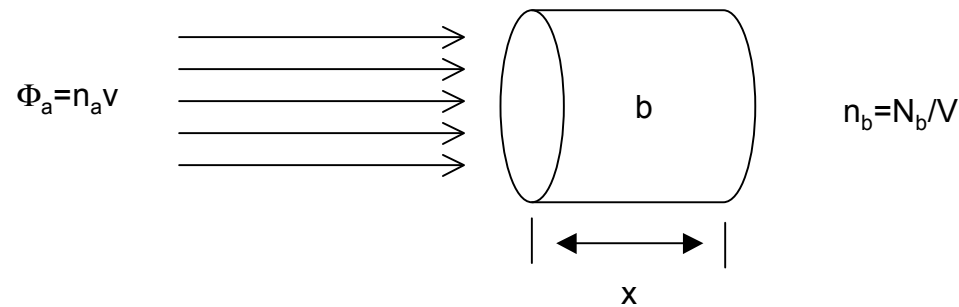
$c=1$ ;  $\hbar/2\pi=1$

Per un fotone, il propagatore è  $1/-q^2$



# Sezione d'urto di interazione

- Reazione  $a+b \rightarrow c+d$



$n_a$ : n. particelle incidenti/volume  
 $v$ : velocità particelle  
 $n_b$ : n. particelle bersaglio/volume

La frequenza di interazioni sarà  $\frac{dN}{dt} = \Phi_a \sigma n_b x$

dove  $\sigma$  è la sezione d'urto del processo, circa l'effettiva area di ciascun particella bersaglio.

La sezione d'urto è misurata in  $\text{cm}^2$  o meglio in barn:

$$1\text{b} = 10^{-24} \text{ cm}^2; \quad 1\text{mb} = 10^{-27} \text{ cm}^2$$

# Probabilità di interazione

La probabilità di interazione per particella bersaglio è  $W = \Phi \sigma$  che si può calcolare conoscendo gli elementi di matrice di transizione tra lo stato iniziale e finale  $T_{if}$  ovvero

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |T_{if}|^2 \frac{dN}{dE_f}$$

$$T_{if} = \int \psi_f^* U \psi_i dV$$

U: potenziale di interazione

$dN/dE_f$  : densità di energia degli stati finali

(Seconda regola d'oro di Fermi.)

La sezione d'urto differenziale per particelle relativistiche si scrive

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|T_{if}|^2 s}{64\pi^2}$$

La diminuzione delle particelle incidenti dopo l'attraversamento del bersaglio è

$$dn = -n_a \sigma n_b dx$$

Integrando si ha

$$n(x) = n_a \exp(-\sigma n_b x) = n_a \exp(-x/\lambda)$$

$$\lambda = 1/\sigma n_b$$

è il cammino libero medio.

$$e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma; \gamma\gamma \rightarrow e^+e^-; \gamma e \rightarrow \gamma e$$

- Processi di interesse astrofisico.
- Nel limite  $s \gg m_e^2$  le sezioni d'urto hanno la forma:  
( $s$ =energia totale nel centro di massa)

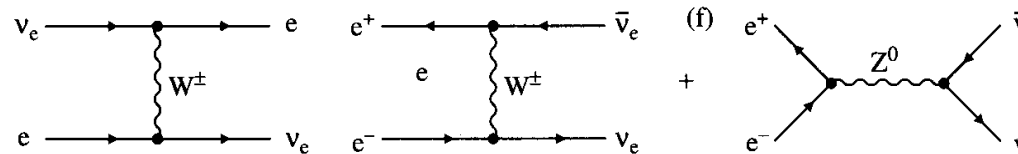
$$\sigma = \left( \frac{2\pi\alpha^2}{s} \right) \left[ \ln\left( \frac{s}{m^2} \right) - 1 \right]$$

$$\sigma = \left( \frac{4\pi\alpha^2}{s} \right) \left[ \ln\left( \frac{s}{m^2} \right) - 1 \right]$$

$$\sigma = \left( \frac{2\pi\alpha^2}{s} \right) \left[ \ln\left( \frac{s}{m^2} \right) + \frac{1}{2} \right] \quad \text{scattering Compton}$$

# Interazioni deboli

- Processi con scambio dei bosoni vettoriali W e Z.



Nell'ampiezza di transizione della diffusione  $\nu_e + e \rightarrow \nu_e + e$  il contributo principale è dato dallo scambio del W. Il propagatore  $1/(|q^2|+M^2)$  per energie non troppo alte ( $<1$  TeV) si riduce a  $1/M^2$  con M, massa del W, pari a  $\approx 80$  GeV.

La sezione d'urto è  $\sigma \approx g_W^4 s/M^4 \approx G_F^2 s$

dove  $G_F$  è la costante di Fermi ed  $s$  è l'energia nel CM al quadrato.

# Decadimenti e risonanze

- $a \rightarrow b+c$ ,  $a$  instabile con frequenza di decadimento  $W=1/\tau$ .  $\tau$ : vita media
- Per il principio di indeterminazione la massa della particella è definita con una larghezza  $\Gamma = \hbar W = \hbar / \tau$ .

- $\mu^+ \rightarrow e^+ \nu_e \text{ antiv}_\mu$        $\Gamma = G_F^2 m_\mu^5 / 192\pi^3$        $\tau = 2.2 \mu\text{s}$   
 $m_\mu = 105.7 \text{ MeV}/c^2$        $\rightarrow$        $G_F = ?$

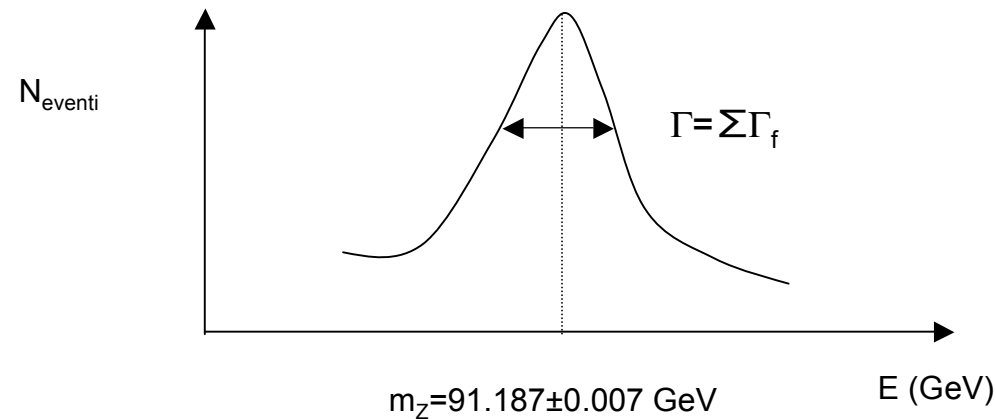
- Se la vita media è estremamente breve, la particella instabile ha una larghezza misurabile e si definisce risonanza.
- Le risonanze si osservano nella loro formazione, dalle collisioni tra particelle in cui decadono.
- La sezione d'urto nel processo di formazione ha la forma

$$\sigma(E) = \sigma_{\max} \frac{\Gamma^2/4}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4}$$

La formulazione che tiene conto anche degli spin delle particelle si chiama formula di Breit e Wigner.

# Risonanze

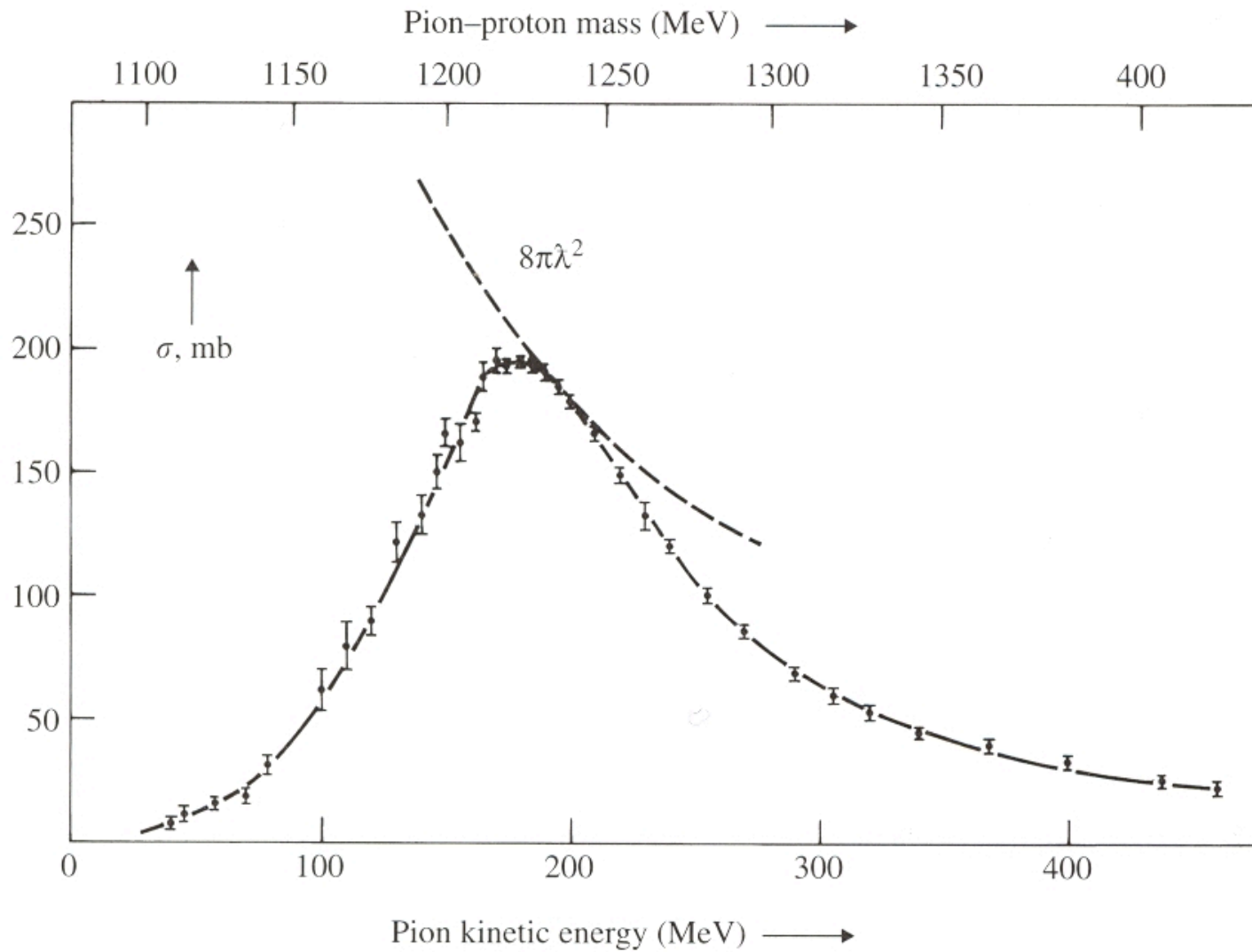
- Nella Breit e Wigner, la larghezza  $\Gamma$  è la larghezza totale, ovvero la somma delle larghezze parziali per ogni canale di decadimento della risonanza.
- La Z ha tutti i canali di decadimento in coppie di leptoni e coppie di quark. La larghezza della risonanza nella formazione  $e^+ e^- \rightarrow Z$  dipende dal numero di neutrini con massa inferiore alla metà della massa dello Z.



# La risonanza $\Delta(1232)$

- La prima risonanza osservata fu la risonanza  $\pi^+ p$  da Anderson Fermi e collaboratori al ciclotrone di Chicago nel 1952.
- $m = 1232 \text{ MeV}/c^2$        $\Gamma = 120 \text{ MeV}$        $\sigma_{\text{max}} = 200 \text{ mb}$
- Protoni di energia superiore a  $10^{20}$  eV interagiscono col fondo cosmico di microne e possono eccitare questa risonanza. Questo meccanismo porterebbe alla soppressione dei raggi cosmici al di sopra di  $10^{20}$  eV, effetto GKZ (Greisen, Kuzmin, Zatsepin).
- Successivamente furono scoperte numerose risonanze mesoni-barioni, mesoni-mesoni e lo studio sistematico dei loro numeri quantici, spin e spin isotopico hanno stimolato la necessità di dare una classificazione.
- Sakata prima, Gell-Mann e Zweig proposero nel '64 il modello a quark.

# La risonanza $\Delta(1232)$





# Leggi di conservazione e simmetrie

- Invarianza di un sistema sotto una particolare operazione.
- Esempi:
  - invarianza per traslazioni → conservazione del momento lineare
  - invarianza per rotazioni → conservazione del momento angolare
- Invarianza per trasformazioni continue o discrete.
- Le invarianze per trasformazioni continue portano a conservazione di numeri quantici additivi. La conservazione dell'energia totale di un sistema è la somma delle energie parziali.
- Le invarianze per trasformazioni discrete portano a numeri quantici moltiplicativi. L'invarianza per riflessioni spaziali, porta alla conservazione della parità e la parità totale di un sistema è il prodotto delle parità dei singoli costituenti.

# Rotazioni

- Rotazioni spaziali con angolo  $\phi$  intorno all'asse z.
- Un vettore  $r$  nel piano  $xy$  fa un angolo  $\phi$  con l'asse  $x$ . Nella rotazione di  $\delta\phi$ , le coordinate cartesiane subiscono un incremento pari a

$$\delta x = -r \sin \phi \delta\phi = -y \delta\phi$$

$$\delta y = r \cos \phi \delta\phi = x \delta\phi$$

L'effetto della rotazione sulla funzione  $\psi$  :

$$\begin{aligned} R(\phi, \delta\phi)\psi(x, y, z) &= \psi(x, y, z) + \delta x \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \delta y \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \\ &= \psi \left[ 1 + \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \delta\phi \right] = \psi \left[ 1 + \delta\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \end{aligned}$$

L'operatore della componente z del momento angolare è definito da

$$J_z = -i\hbar \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$$

Una rotazione finita è ottenuta da  $n$  incrementi infinitesimi

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + iJ_z \frac{\delta\phi}{\hbar} \right)^n = \exp \left( iJ_z \frac{\Delta\phi}{\hbar} \right)$$

$J_z$  è chiamato il generatore della rotazione finita  $\Delta\phi$

# Rotazioni

- Un insieme di rotazioni di un sistema forma un gruppo e ciascuna rotazione è un elemento del gruppo. Due rotazioni successive sono equivalenti ad una singola rotazione  $R=R_2R_1$ . L'elemento identità rappresenta una rotazione nulla.
- Il gruppo delle rotazioni è un gruppo continuo, ovvero ciascuna rotazione è caratterizzata da parametri continui.
- Ciascuna rotazione può essere espressa dal prodotto di rotazioni infinitesime.
- Poiché il risultato di un esperimento non deve dipendere dall'orientamento del laboratorio, le rotazioni debbono formare un gruppo di simmetria del sistema.
- Sotto la trasformazione R il sistema si trasforma

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = U|\psi\rangle$$
$$|\langle\phi|\psi\rangle|^2 = |\langle\phi'|\psi'\rangle|^2 = |\langle\phi|U^\dagger U|\psi\rangle|^2$$

Ovvero la probabilità che un sistema descritto da  $|\psi\rangle$  si trasformi nello stato  $|\phi\rangle$  non deve cambiare per la rotazione R. Quindi U è un operatore unitario.

Gli operatori  $U(R_1)$ ,  $U(R_2)$ , .....formano un gruppo con la stessa struttura del gruppo originario  $R_1$ ,  $R_2$ , .....e sono la rappresentazione unitaria del gruppo delle rotazioni.

# Invarianza per rotazioni

- L'Hamiltoniana non cambia per la rotazione R e gli elementi di matrice sono conservati. L'equazione del moto non cambia per la rotazione R e quindi il valore di aspettazione di U è una costante del moto.

$$\langle \phi' | H | \psi' \rangle = \langle \phi | U^\dagger H U | \psi \rangle = \langle \phi | H | \psi \rangle$$

quindi

$$H = U^\dagger H U \quad \text{ovvero} \quad [U, H] = UH - HU = 0$$

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle$$

$$i \frac{d}{dt} \langle \psi(t) | U | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t) | UH - HU | \psi(t) \rangle = 0$$

Poiché nella rappresentazione di Heisenberg si ha

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{i}{\hbar} (TH - HT) \text{ per le grandezze non esplicitamente dipendenti da } t$$

# Parità

- L'inversione delle coordinate spaziali è una trasformazione discreta che opera sulla funzione d'onda, ovvero  $P\psi(\mathbf{r}) = \psi(-\mathbf{r})$  e  $P^2=1$ . Gli autovalori di  $P$  dovranno essere  $\pm 1$ . Questi valori definiscono la parità del sistema.
- Nelle interazioni elettromagnetiche e forti la parità è conservata, ovvero la parità dello stato finale è uguale alla parità dello stato iniziale.
- Nelle interazioni deboli la parità è violata. Nel 1956 C.S. Wu e collaboratori dimostrarono la violazione della parità nel decadimento del  $\text{Co}^{60}$  in  $e^- \gamma$ .
- Un sistema di due particelle identiche è descritto da una funzione d'onda prodotto della funzione spazio e di spin:

$$\psi = \chi(\text{spazio}) \alpha(\text{spin})$$

Con

$$\chi(r, \theta, \phi) = \xi(r) Y_{l,m}(\theta, \phi)$$

$Y_{l,m}$  è la funzione armonica sferica di momento angolare  $l$  e componente  $z$   $m$ .

Sotto l'inversione di parità,  $\theta \rightarrow (\pi - \theta)$  e  $\phi \rightarrow (\pi + \phi)$  e si ha

$$Y_{l,m}(\pi - \theta, \pi + \phi) = (-1)^l Y_{l,m}(\theta, \phi)$$

# Parità di due fermioni e del $\pi$

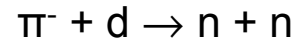
- 2 fermioni identici hanno  $\alpha(S, S_z)$  con S: spin totale e  $S_z = 0, \pm 1$
- Gli stati possibili sono  $(2s+1)^2$ :

$\alpha(1,+1)$	$\uparrow\uparrow$
$\alpha(1,-1)$	$\downarrow\downarrow$
$\alpha(1,0)$	$(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)/\sqrt{2}$
$\alpha(0,0)$	$(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)/\sqrt{2}$

Le prime tre funzioni d'onda sono simmetriche rispetto allo scambio delle due particelle, mentre la quarta è antisimmetrica. Quindi la funzione di spin ha parità  $(-1)^{S+1}$ .

La funzione d'onda totale sotto lo scambio di coordinate e di spin cambia segno come  $(-1)^{l+S+1}$

- La parità intrinseca del  $\pi^-$  è determinata dalla reazione in onda s ( $l=0$ )



Il  $\pi^-$  ha spin 0 ed il deutone spin 1, quindi nello stato iniziale  $J = 1$  e anche nello stato finale. Poiché i neutroni sono fermioni, debbono essere in uno stato antisimmetrico e quindi avere  $L+S$  pari.

L'unica possibilità è  $L=1, S=1$ . (*verificare*).

La parità dello stato finale è quindi -1.

Poiché le parità intrinseche dei nucleoni si cancellano nello stato iniziale e finale, il  $\pi$  deve avere parità intrinseca -1.

- Particella e antiparticella hanno parità intrinseche opposte.

# Coniugazione di carica

- La coniugazione di carica  $C$  inverte il segno della carica ed il momento magnetico della particella senza alterare le altre coordinate.
- Le equazioni di Maxwell sono invarianti per il cambiamento di segno della carica e della corrente e quindi le interazioni em sono invarianti sotto  $C$ . Il  $\pi^0$  decade in due fotoni e poiché il fotone ha  $C=-1$ , in quanto la corrente  $j$  cambia segno per  $C$ , lo stato finale avrà  $C=(-1)^2=1$ . Il decadimento del  $\pi^0$  è un processo elettromagnetico che avviene con una vita media  $\tau=(8.4 \pm 0.6) \times 10^{-17}$  s. Quindi  $C$  deve essere conservato. Di conseguenza il  $\pi^0$  ha  $C=+1$ .
- Anche le interazioni forti sono invarianti per  $C$ . L'invarianza si basa su due postulati verificati sperimentalmente: la simmetria di carica e l'indipendenza dalla carica. La simmetria di carica è verificata ad esempio nei nuclei "specchio" di carica  $Z$  e  $Z+1$  ma con lo stesso numero totale di neutroni e protoni. Ad esempio le energie di legame dei nuclei  ${}^3\text{H}$  e  ${}^3\text{He}$  ovvero dei nuclei  ${}^{13}\text{C}$  e  ${}^{13}\text{N}$  sono le stesse, tenuto conto delle forze coulombiane.
- Le interazioni deboli non sono invarianti per coniugazione di carica.