

Astrofisica e particelle elementari

aa 2009-10

Lezione 3

Particelle

Interazioni

Sezioni d'urto

Simmetrie e invarianze

Bruno Borgia

Adroni e leptoni

Possiamo distinguere le particelle *stabili* in due grandi categorie: adroni e leptoni

- Adroni: nuclei, protone, neutrone (stabile se legato nel nucleo)
- Leptoni: elettrone, positrone, neutrino

- Gli adroni sono particelle “composite”
- I leptoni sono particelle “puntiformi”

- La scoperta dei quark, particelle costituenti gli adroni, è avvenuta attraverso un processo sperimentale e teorico partendo dalla scoperta di numerose “risonanze” che hanno suggerito un modello basato sulla combinazione di 3 elementi. Successivamente gli esperimenti di diffusione ep a SLAC alla “Rutherford” hanno identificato costituenti elementari del protone e del neutrone: i partoni. I partoni venivano identificati a loro volta con i quark. La conferma è avvenuta con gli esperimenti all’anello di accumulazione Adone ed agli altri anelli.

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}$$

Quark e colore

Nome	Spin	B	L	Q
u	1/2	1/3	0	+2/3
d	1/2	1/3	0	-1/3
e	1/2	0	1	-1
ν	1/2	0	1	0
γ	1	0	0	0
W	1	0	0	± 1
Z	1	0	0	0
g	1	0	0	0

Quark	Massa	Leptoni	Massa
u	330 MeV	e	0.51 MeV
d	330 MeV	ν_e	< 4 eV
c	1.5 GeV	μ	105.6 MeV
s	0.5 GeV	ν_μ	< 0.25 MeV
t	175 GeV	τ	1780 MeV
b	5 GeV	ν_τ	< 35 MeV

- Spin e statistica: $|\psi|^2$ è indipendente dallo scambio tra due particelle identiche.
- per una coppia di bosoni $\psi \rightarrow \psi$
- per una coppia di fermioni $! \quad \#!$
- Nello stesso stato quantico possono trovarsi due bosoni, ma non due fermioni
- Gell-Mann Zweig hanno proposto il modello a quark con tre costituenti di base.
- Il quark u ha tre versioni con le “cariche” di colore rosso, blu e verde (R,B,G). Poiché la simmetria di colore è esatta, le masse dei quark colorati sono esattamente le stesse. In natura le particelle sono “bianche” e quindi sono combinazioni appropriate dei colori o dei colori complementari: grigio-azzurro (ciano), magenta, giallo ($\bar{R}, \bar{G}, \bar{B}$)

$$p : RGB$$

$$\bar{p} : \bar{R}\bar{G}\bar{B}$$

$$\pi : R\bar{R} + G\bar{G} + B\bar{B}$$

Antiparticelle

- L'equazione di Klein Gordon si ottiene dalla relazione energia-momento relativistica sostituendo ad E e \mathbf{p} gli operatori differenziali:

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2$$
$$\frac{-\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \nabla^2 \phi = m^2 \phi$$

- Gli autovalori dell'energia sono

$$E = \pm(\vec{p}^2 + m^2)^{1/2}$$

ovvero con energia negativa e densità di probabilità negativa

Dirac ha ottenuto per i fermioni quattro soluzioni di cui due descrivono un fermione di spin 1/2 con $E > 0$ e $t_1 \rightarrow t_2$, due con $E < 0$ e $t_2 \rightarrow t_1$.

Le soluzioni ad energia negativa sono interpretabili con un fermione di carica opposta che viaggia nella direzione positiva con energia positiva.

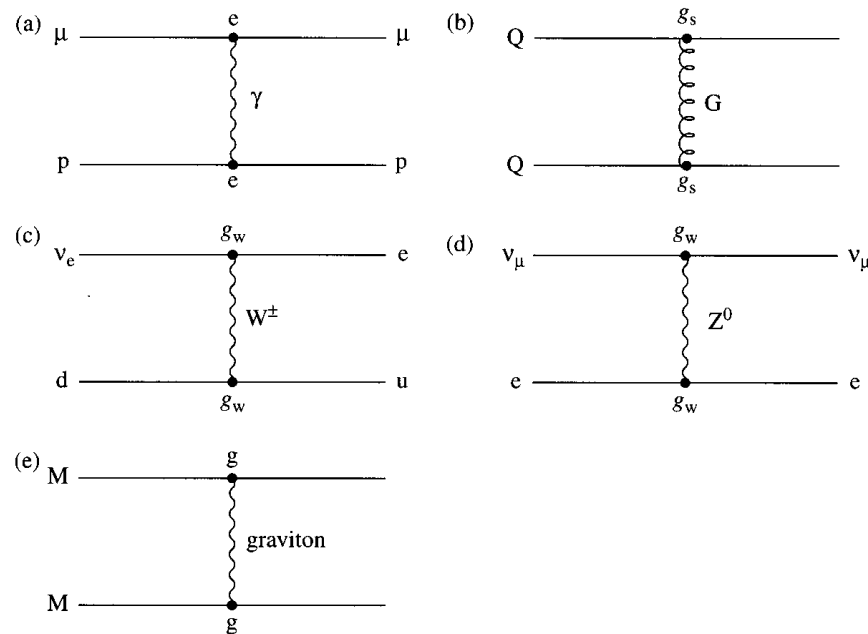
I fermioni sono creati e distrutti in coppie particella-antiparticella. Ad esempio in un collider si ha $e^+ e^- \rightarrow \gamma + \gamma$. Anche $\gamma (N) \rightarrow e^+ e^-$.

Interazioni fondamentali

- Le interazioni tra leptoni e quark avvengono tramite lo scambio di un bosone mediatore caratteristico di ogni tipo di interazione.

Interazione	Mediatore	Massa	Intensità relativa	Q
elettromagnetica	fotone	0	10^{-2}	0
forte	gluone	0	1	0 (colore!)
debole	W Z	80-92 GeV	10^{-7}	± 1 0
gravitazionale	gravitone	0 (spin 2)	10^{-39}	0

Le interazioni sono rappresentate graficamente dai seguenti diagrammi.



Scambio del bosone

- Nell'interazione di un elettrone con un altro elettrone attraverso lo scambio di un fotone, l'elettrone cede al fotone un'energia ΔE ed un momento Δp . Si ha

$$E^2 = p^2 + m^2 \quad c = 1$$

$$\Delta E \cdot E = \Delta p \cdot p$$

$$\Delta m^2 = \Delta E^2 - \Delta p^2 = -\frac{m^2 \Delta p^2}{E^2} < 0$$

- Il fotone ha massa immaginaria ed energia ΔE per un tempo Δt tale che $\Delta E \Delta t < h/2\pi$.
- La quantità Δm^2 è definita nel sistema di riferimento del fotone scambiato ed è quindi relativisticamente invariante. Si chiama momento trasferito quadrato e si indica con q^2 .
- Se ΔE è grande, il raggio d'azione dell'interazione è piccolo perché $c\Delta t < h/2\pi E$, come avviene nelle interazioni deboli, data la massa del W e dello Z.
- Yukawa ha mostrato che il potenziale di interazione dovuto ad un bosone a spin 0 di massa M ha la forma

$$V(r) \propto \left(\frac{1}{r}\right) \exp\left(\frac{-r}{r_0}\right) \quad \text{con } r_0 = \frac{hc}{2\pi M c^2}$$

- Poiché il raggio d'azione effettivo delle forze nucleari è dell'ordine di $1 \text{ fm} = 10^{-13} \text{ cm}$, Yukawa predisse la massa del mesone $\approx 200 \text{ MeV}/c^2$.

$$\hbar = 6.6 \times 10^{-25} \text{ GeV s}$$

Propagatore

- L'ampiezza di scattering di una particella contro un'altra particella è proporzionale alle costanti di accoppiamento delle particelle con il bosone mediatore ed al propagatore che caratterizza le proprietà del bosone.
- Interazione elettromagnetica $e^2=4\pi\alpha\hbar c$ (in unità naturali)= $4\pi\alpha$ $\alpha\approx 1/137$
- Interazione forte $\alpha_s(Q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2n_f)\log(Q^2 / \Lambda^2)}$
- Interazione debole $G_F = g_W^2 / (-q^2 + M_W^2) = 1.17 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$; $g_W = e$
- Interazione gravitazionale $GM^2/4\pi\hbar c = 5.3 \times 10^{-40}$

massa di Planck $M_P = (\hbar c/G)^{1/2} = 1.2 \times 10^{19} \text{ GeV}/c^2 \approx 2 \times 10^{-2} \text{ mg}$

lunghezza di Planck $L_P = \hbar/M_P = 1.6 \times 10^{-35} \text{ m} = 1.6 \times 10^{-20} \text{ fm}$

Propagatore

- Dall'equazione di Klein Gordon per un potenziale statico e radialmente simmetrico si ricava la soluzione già anticipata per $V(r)$.
- L'ampiezza di scattering sarà la trasformata di Fourier del potenziale. Il risultato è

$$f(q^2) = [gg_0/(m^2-q^2)]$$

g : costante di accoppiamento col potenziale;

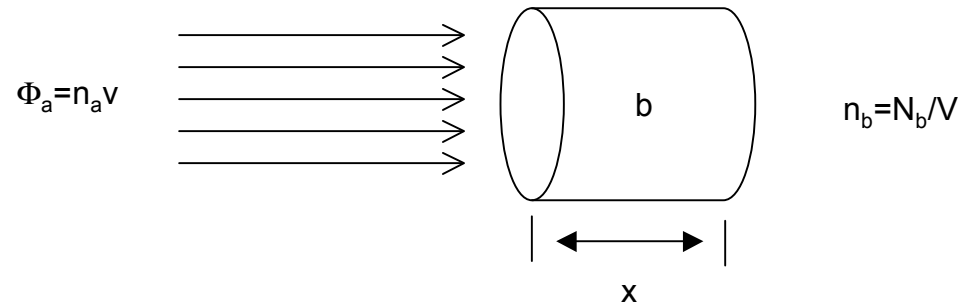
g_0 : costante integrazione

$c=1$; $\hbar/2\pi=1$

Per un fotone, il propagatore è $1/-q^2$

Sezione d'urto di interazione

- Reazione $a+b \rightarrow c+d$



n_a : n. particelle incidenti/volume
 v : velocità particelle
 n_b : n. particelle bersaglio/volume

La frequenza di interazioni sarà $\frac{dN}{dt} = \Phi_a \sigma n_b x$

dove σ è la sezione d'urto del processo, circa l'effettiva area di ciascun particella bersaglio.

La sezione d'urto è misurata in cm^2 o meglio in barn:

$$1\text{b} = 10^{-24} \text{ cm}^2; \quad 1\text{mb} = 10^{-27} \text{ cm}^2$$

Probabilità di interazione

La probabilità di interazione per particella bersaglio è $W = \Phi \sigma$ che si può calcolare conoscendo gli elementi di matrice di transizione tra lo stato iniziale e finale T_{if} ovvero

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |T_{if}|^2 \frac{dN}{dE_f}$$

$$T_{if} = \int \psi_f^* U \psi_i dV$$

U: potenziale di interazione

dN/dE_f : densità di energia degli stati finali

(Seconda regola d'oro di Fermi.)

La sezione d'urto differenziale per particelle relativistiche si scrive

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|T_{if}|^2 s}{64\pi^2}$$

La diminuzione delle particelle incidenti dopo l'attraversamento del bersaglio è

$$dn = -n_a \sigma n_b dx$$

Integrando si ha

$$n(x) = n_a \exp(-\sigma n_b x) = n_a \exp(-x/\lambda)$$

$$\lambda = 1/\sigma n_b$$

è il cammino libero medio.

$$e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma; \gamma\gamma \rightarrow e^+e^-; \gamma e \rightarrow \gamma e$$

- Processi di interesse astrofisico.
- Nel limite $s \gg m_e^2$ le sezioni d'urto hanno la forma:
(s =energia totale nel centro di massa)

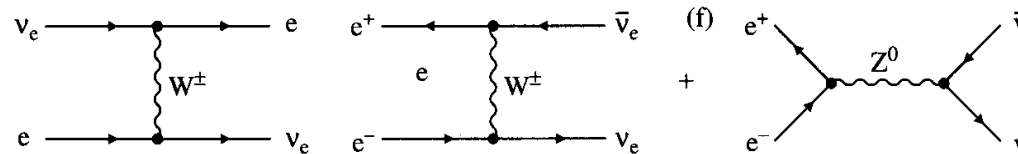
$$\sigma = \left(\frac{2\pi\alpha^2}{s} \right) \left[\ln\left(\frac{s}{m^2} \right) - 1 \right]$$

$$\sigma = \left(\frac{4\pi\alpha^2}{s} \right) \left[\ln\left(\frac{s}{m^2} \right) - 1 \right]$$

$$\sigma = \left(\frac{2\pi\alpha^2}{s} \right) \left[\ln\left(\frac{s}{m^2} \right) + \frac{1}{2} \right] \quad \text{scattering Compton}$$

Interazioni deboli

- Processi con scambio dei bosoni vettoriali W e Z.



Nell'ampiezza di transizione della diffusione $\nu_e + e \rightarrow \nu_e + e$ il contributo principale è dato dallo scambio del W. Il propagatore $1/(|q^2|+M^2)$ per energie non troppo alte (<1 TeV) si riduce a $1/M^2$ con M, massa del W, pari a ≈ 80 GeV.

La sezione d'urto è $\sigma \approx g_W^4 s/M^4 \approx G_F^2 s$

dove G_F è la costante di Fermi ed s è l'energia nel CM al quadrato.

Decadimenti e risonanze

- $a \rightarrow b+c$, a instabile con frequenza di decadimento $W=1/\tau$. τ : vita media
- Per il principio di indeterminazione la massa della particella è definita con una larghezza $\Gamma = \hbar W = \hbar / \tau$.

- $\mu^+ \rightarrow e^+ \nu_e \text{ antiv}_\mu$ $\Gamma = G_F^2 m_\mu^5 / 192\pi^3$ $\tau = 2.2 \mu\text{s}$
 $m_\mu = 105.7 \text{ MeV}/c^2$ \rightarrow $G_F = ?$

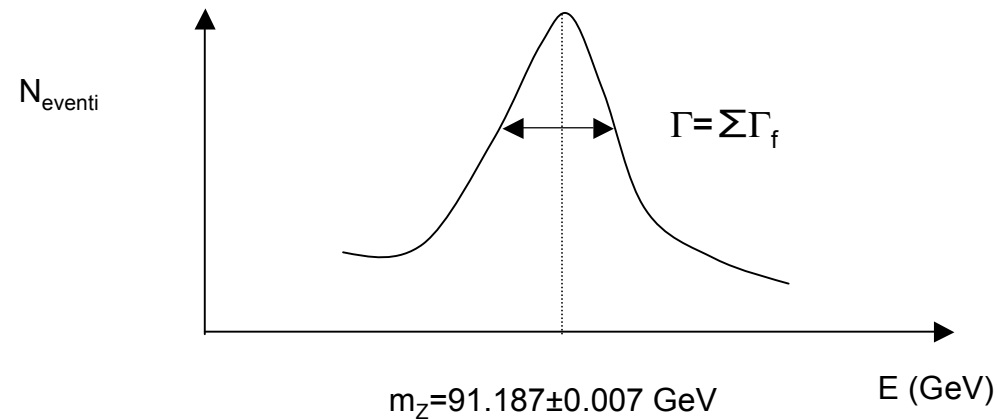
- Se la vita media è estremamente breve, la particella instabile ha una larghezza misurabile e si definisce risonanza.
- Le risonanze si osservano nella loro formazione, dalle collisioni tra particelle in cui decadono.
- La sezione d'urto nel processo di formazione ha la forma

$$\sigma(E) = \sigma_{\max} \frac{\Gamma^2/4}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4}$$

La formulazione che tiene conto anche degli spin delle particelle si chiama formula di Breit e Wigner.

Risonanze

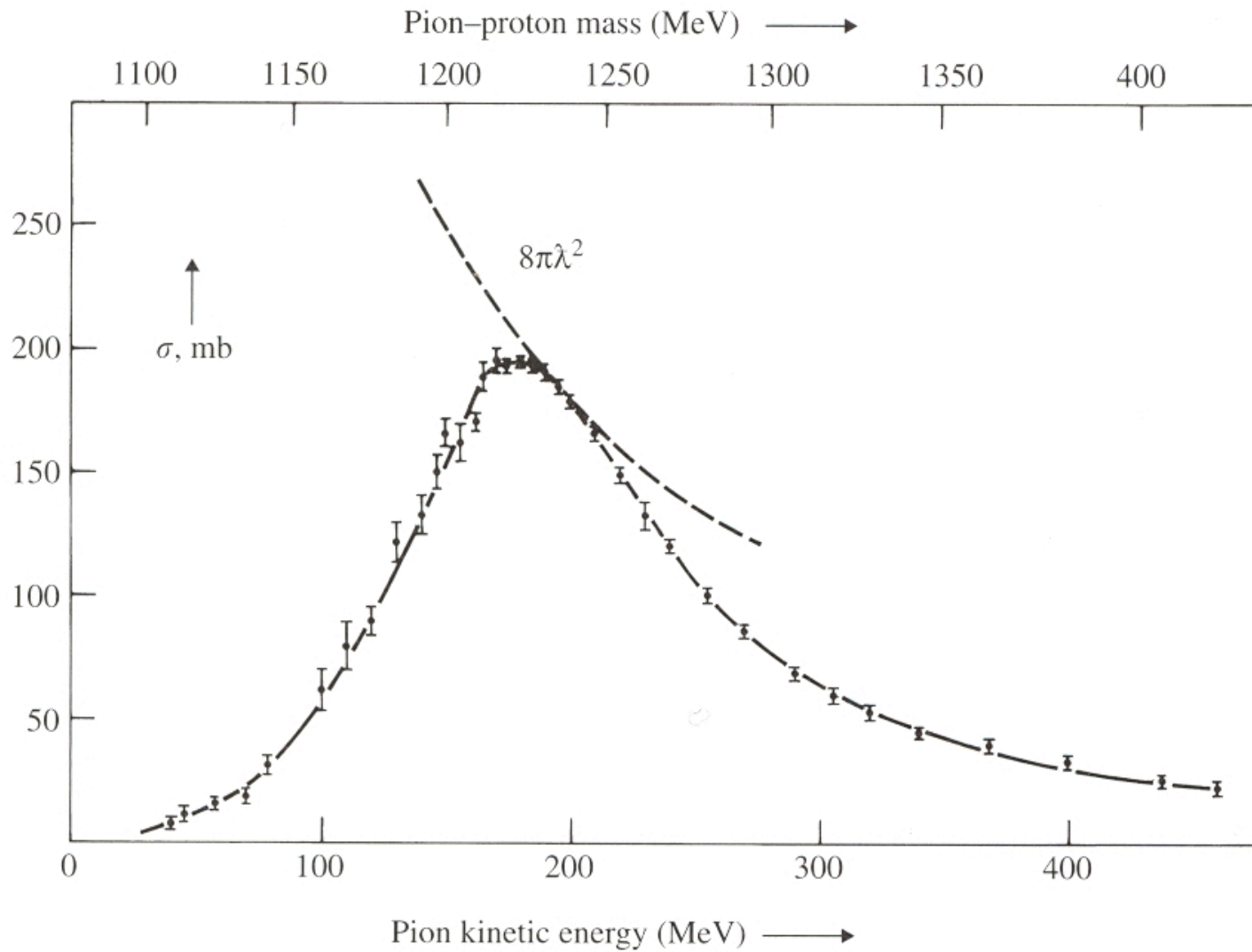
- Nella Breit e Wigner, la larghezza Γ è la larghezza totale, ovvero la somma delle larghezze parziali per ogni canale di decadimento della risonanza.
- La Z ha tutti i canali di decadimento in coppie di leptoni e coppie di quark. La larghezza della risonanza nella formazione $e^+ e^- \rightarrow Z$ dipende dal numero di neutrini con massa inferiore alla metà della massa dello Z.



La risonanza $\Delta(1232)$

- La prima risonanza osservata fu la risonanza $\pi^+ p$ da Anderson Fermi e collaboratori al ciclotrone di Chicago nel 1952.
- $m = 1232 \text{ MeV}/c^2$ $\Gamma = 120 \text{ MeV}$ $\sigma_{\text{max}} = 200 \text{ mb}$
- Protoni di energia superiore a 10^{20} eV interagiscono col fondo cosmico di microne e possono eccitare questa risonanza. Questo meccanismo porterebbe alla soppressione dei raggi cosmici al di sopra di 10^{20} eV, effetto GKZ (Greisen, Kuzmin, Zatsepin).
- Successivamente furono scoperte numerose risonanze mesoni-barioni, mesoni-mesoni e lo studio sistematico dei loro numeri quantici, spin e spin isotopico hanno stimolato la necessità di dare una classificazione.
- Sakata prima, Gell-Mann e Zweig proposero nel '64 il modello a quark.

La risonanza $\Delta(1232)$



Leggi di conservazione e simmetrie

- Invarianza di un sistema sotto una particolare operazione.
- Esempi:
 - invarianza per traslazioni → conservazione del momento lineare
 - invarianza per rotazioni → conservazione del momento angolare
- Invarianza per trasformazioni continue o discrete.
- Le invarianze per trasformazioni continue portano a conservazione di numeri quantici additivi. La conservazione dell'energia totale di un sistema è la somma delle energie parziali.
- Le invarianze per trasformazioni discrete portano a numeri quantici moltiplicativi. L'invarianza per riflessioni spaziali, porta alla conservazione della parità e la parità totale di un sistema è il prodotto delle parità dei singoli costituenti.

Rotazioni

- Rotazioni spaziali con angolo ϕ intorno all'asse z.
- Un vettore r nel piano xy fa un angolo ϕ con l'asse x . Nella rotazione di $\delta\phi$, le coordinate cartesiane subiscono un incremento pari a

$$\delta x = -r \sin \phi \delta\phi = -y \delta\phi$$

$$\delta y = r \cos \phi \delta\phi = x \delta\phi$$

L'effetto della rotazione sulla funzione ψ :

$$\begin{aligned} R(\phi, \delta\phi)\psi(x, y, z) &= \psi(x, y, z) + \delta x \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \delta y \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \\ &= \psi \left[1 + \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \delta\phi \right] = \psi \left[1 + \delta\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \end{aligned}$$

L'operatore della componente z del momento angolare è definito da

$$J_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$$

Una rotazione finita è ottenuta da n incrementi infinitesimi

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + iJ_z \frac{\delta\phi}{\hbar} \right)^n = \exp \left(iJ_z \frac{\Delta\phi}{\hbar} \right)$$

J_z è chiamato il generatore della rotazione finita $\Delta\phi$

Rotazioni

- Un insieme di rotazioni di un sistema forma un gruppo e ciascuna rotazione è un elemento del gruppo. Due rotazioni successive sono equivalenti ad una singola rotazione $R=R_2R_1$. L'elemento identità rappresenta una rotazione nulla.
- Il gruppo delle rotazioni è un gruppo continuo, ovvero ciascuna rotazione è caratterizzata da parametri continui.
- Ciascuna rotazione può essere espressa dal prodotto di rotazioni infinitesime.
- Poiché il risultato di un esperimento non deve dipendere dall'orientamento del laboratorio, le rotazioni debbono formare un gruppo di simmetria del sistema.
- Sotto la trasformazione R il sistema si trasforma

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = U|\psi\rangle$$
$$|\langle\phi|\psi\rangle|^2 = |\langle\phi'|\psi'\rangle|^2 = |\langle\phi|U^\dagger U|\psi\rangle|^2$$

Ovvero la probabilità che un sistema descritto da $|\psi\rangle$ si trasformi nello stato $|\phi\rangle$ non deve cambiare per la rotazione R. Quindi U è un operatore unitario.

Gli operatori $U(R_1)$, $U(R_2)$,formano un gruppo con la stessa struttura del gruppo originario R_1 , R_2 ,e sono la rappresentazione unitaria del gruppo delle rotazioni.

Invarianza per rotazioni

- L'Hamiltoniana non cambia per la rotazione R e gli elementi di matrice sono conservati. L'equazione del moto non cambia per la rotazione R e quindi il valore di aspettazione di U è una costante del moto.

$$\langle \phi' | H | \psi' \rangle = \langle \phi | U^\dagger H U | \psi \rangle = \langle \phi | H | \psi \rangle$$

quindi

$$H = U^\dagger H U \quad \text{ovvero} \quad [U, H] = UH - HU = 0$$

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle$$

$$i \frac{d}{dt} \langle \psi(t) | U | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t) | UH - HU | \psi(t) \rangle = 0$$

Poiché nella rappresentazione di Heisenberg si ha

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{i}{\hbar} (TH - HT) \text{ per le grandezze non esplicitamente dipendenti da } t$$

Parità

- L'inversione delle coordinate spaziali è una trasformazione discreta che opera sulla funzione d'onda, ovvero $P\psi(\mathbf{r}) = \psi(-\mathbf{r})$ e $P^2=1$. Gli autovalori di P dovranno essere ± 1 . Questi valori definiscono la parità del sistema.
- Nelle interazioni elettromagnetiche e forti la parità è conservata, ovvero la parità dello stato finale è uguale alla parità dello stato iniziale.
- Nelle interazioni deboli la parità è violata. Nel 1956 C.S. Wu e collaboratori dimostrarono la violazione della parità nel decadimento del Co^{60} in $e^- \gamma$.
- Un sistema di due particelle identiche è descritto da una funzione d'onda prodotto della funzione spazio e di spin:

$$\psi = \chi(\text{spazio}) \alpha(\text{spin})$$

Con

$$\chi(r, \theta, \phi) = \xi(r) Y^m_l(\theta, \phi)$$

Y^m_l è la funzione armonica sferica di momento angolare l e componente z m .

Sotto l'inversione di parità, $\theta \rightarrow (\pi - \theta)$ e $\phi \rightarrow (\pi + \phi)$ e si ha

$$Y^m_l(\pi - \theta, \pi + \phi) = (-1)^l Y^m_l(\theta, \phi)$$

Parità di due fermioni e del π

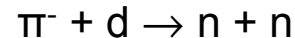
- 2 fermioni identici hanno $\alpha(S, S_z)$ con S: spin totale e $S_z = 0, \pm 1$
- Gli stati possibili sono $(2s+1)^2$:

$\alpha(1,+1)$	$\uparrow\uparrow$
$\alpha(1,-1)$	$\downarrow\downarrow$
$\alpha(1,0)$	$(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)/\sqrt{2}$
$\alpha(0,0)$	$(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)/\sqrt{2}$

Le prime tre funzioni d'onda sono simmetriche rispetto allo scambio delle due particelle, mentre la quarta è antisimmetrica. Quindi la funzione di spin ha parità $(-1)^{S+1}$.

La funzione d'onda totale sotto lo scambio di coordinate e di spin cambia segno come $(-1)^{l+S+1}$

- La parità intrinseca del π^- è determinata dalla reazione in onda s ($l=0$)



Il π^- ha spin 0 ed il deutone spin 1, quindi nello stato iniziale $J = 1$ e anche nello stato finale. Poiché i neutroni sono fermioni, debbono essere in uno stato antisimmetrico e quindi avere $L+S$ pari.

L'unica possibilità è $L=1, S=1$. (*verificare*).

La parità dello stato finale è quindi -1.

Poiché le parità intrinseche dei nucleoni si cancellano nello stato iniziale e finale, il π deve avere parità intrinseca -1.

- Particella e antiparticella hanno parità intrinseche opposte.

Coniugazione di carica

- La coniugazione di carica C inverte il segno della carica ed il momento magnetico della particella senza alterare le altre coordinate.
- Le equazioni di Maxwell sono invarianti per il cambiamento di segno della carica e della corrente e quindi le interazioni em sono invarianti sotto C . Il π^0 decade in due fotoni e poiché il fotone ha $C=-1$, in quanto la corrente j cambia segno per C , lo stato finale avrà $C=(-1)^2=1$. Il decadimento del π^0 è un processo elettromagnetico che avviene con una vita media $\tau=(8.4 \pm 0.6) \times 10^{-17}$ s. Quindi C deve essere conservato. Di conseguenza il π^0 ha $C=+1$.
- Anche le interazioni forti sono invarianti per C . L'invarianza si basa su due postulati verificati sperimentalmente: la simmetria di carica e l'indipendenza dalla carica. La simmetria di carica è verificata ad esempio nei nuclei "specchio" di carica Z e $Z+1$ ma con lo stesso numero totale di neutroni e protoni. Ad esempio le energie di legame dei nuclei ${}^3\text{H}$ e ${}^3\text{He}$ ovvero dei nuclei ${}^{13}\text{C}$ e ${}^{13}\text{N}$ sono le stesse, tenuto conto delle forze coulombiane.
- Le interazioni deboli non sono invarianti per coniugazione di carica.