Astrofisica e particelle elementari

aa 2010-11

Lezione 8

- L’universo
- La Galassia
- Espansione dell’universo
- Cosmologia newtoniana
- Equazione di Friedmann-Leimatre
- Età dell’universo
- Densità di energia

Bruno Borgia

L’Universo

- Oggetti “visibili”:

  Stelle, pianeti, supernove, quasar, pulsar, stelle di neutroni, ecc.

  Galassie: aggregazione di stelle, $\approx 10^{11}$, dalla struttura caratteristica, frequentemente ellittica o a spirale.

  Al centro: popolazione II: stelle più vecchie, rigonfiamento, alone.

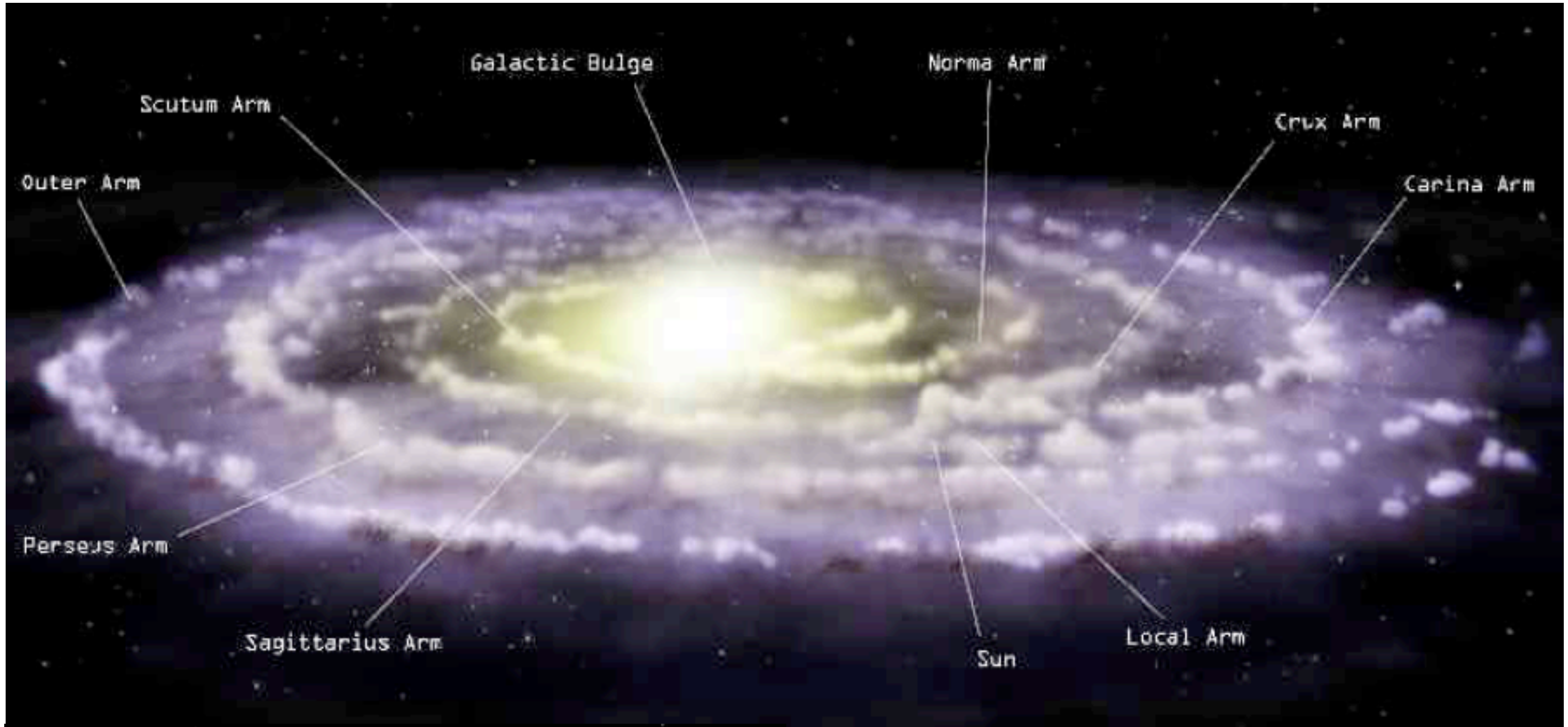
  In periferia: popolazione I: stelle più giovani.

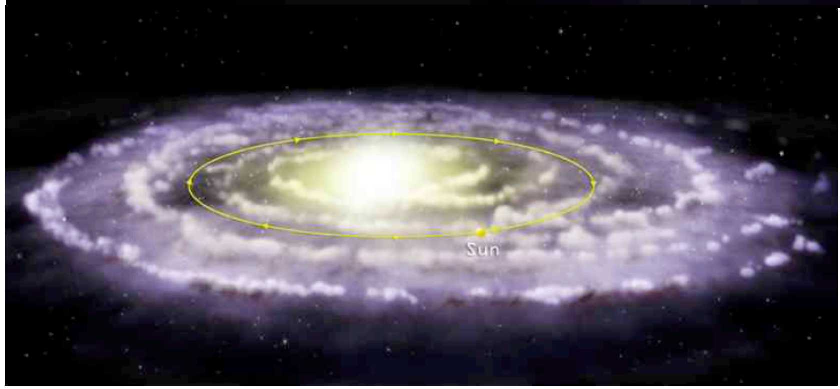
  Ammassi di galassie formano i cluster. La Galassia appartiene al Gruppo Locale. Le galassie sono dell’ordine di 10^{11}.

- Oggetti “non visibili”:

  Costituiscono la gran “parte” dell’universo.

La Galassia





Distanza Sole-centro Galassia
8.5 kpc
nuovo valore
7.94±0.42 kpc
1 pc = 3.3 ly = $3.1 \cdot 10^{16}$ m ≈ $2 \cdot 10^{5}$ AU
1 AU/c = 8.3 min

Hubble e l’espansione dell’universo

Hubble, 1924, osserva lo spostamento verso il rosso delle linee spettrali della luce emessa dalle stelle nelle galassie lontane. L’interpretazione si basa sull’effetto Doppler dovuto alla velocità di allontanamento delle galassie rispetto alla Terra. La lunghezza d’onda misurata risulta:

$$\lambda' = \lambda[(1+\beta)/(1-\beta)]^{1/2} = \lambda\,(1+z)$$

$$\text{dove } \beta = v/c \quad \text{e} \quad z = \Delta\lambda/\lambda = [(1+\beta)/(1-\beta)]^{1/2} - 1$$

Hubble successivamente, 1929, scopre la relazione:

$$v = H_0\, r$$

con r distanza *propria* della galassia dall’osservatore.

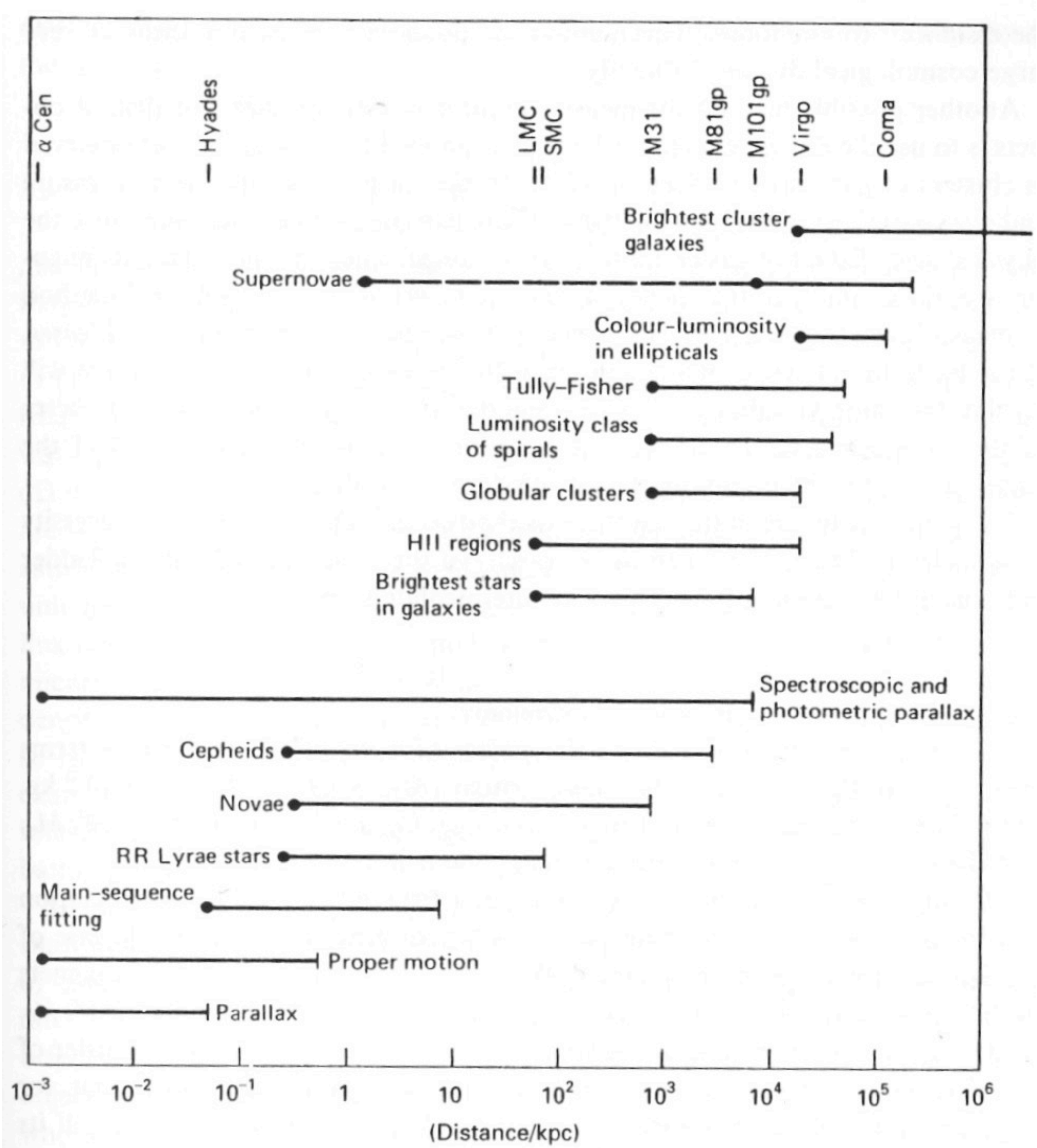
In cosmologia si definisce *distanza propria* la distanza tra due oggetti celesti al tempo t, mentre la *distanza comovente* è misurata in un sistema di coordinate che si espande come l’universo.

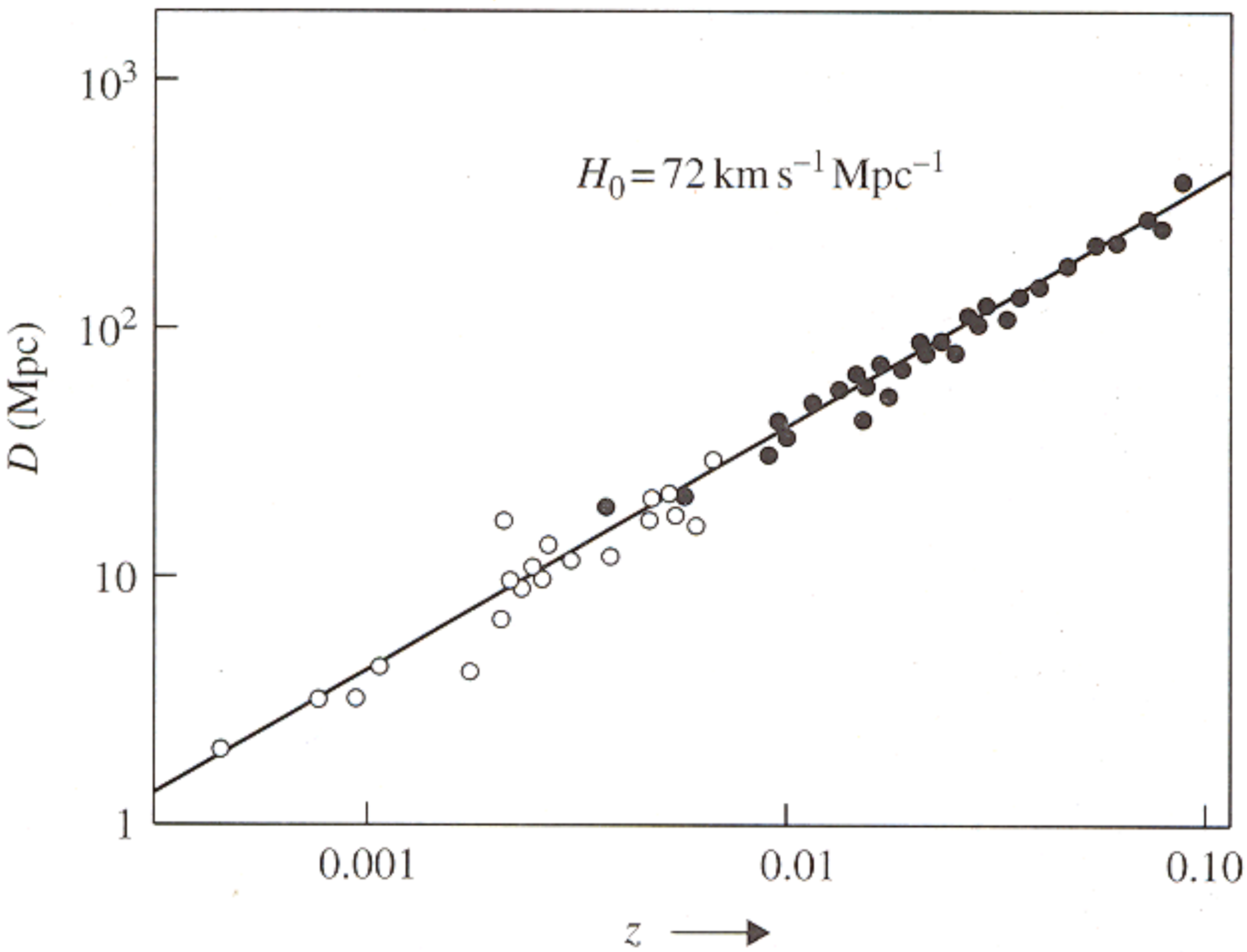
L'espansione dell'Universo

- Il valore della costante H_0 può dipendere dal tempo se l'Universo si espande più o meno rapidamente. Il valore ottenuto con i dati dello Hubble Space Telescope (2011) è
    - $H_0 = 73.8 \pm 2.4$ km s^{-1} Mpc^{-1}
- Il risultato (2010) di WMAP è
    - $H_0 = 71.0 \pm 2.5$ km s^{-1} Mpc^{-1}

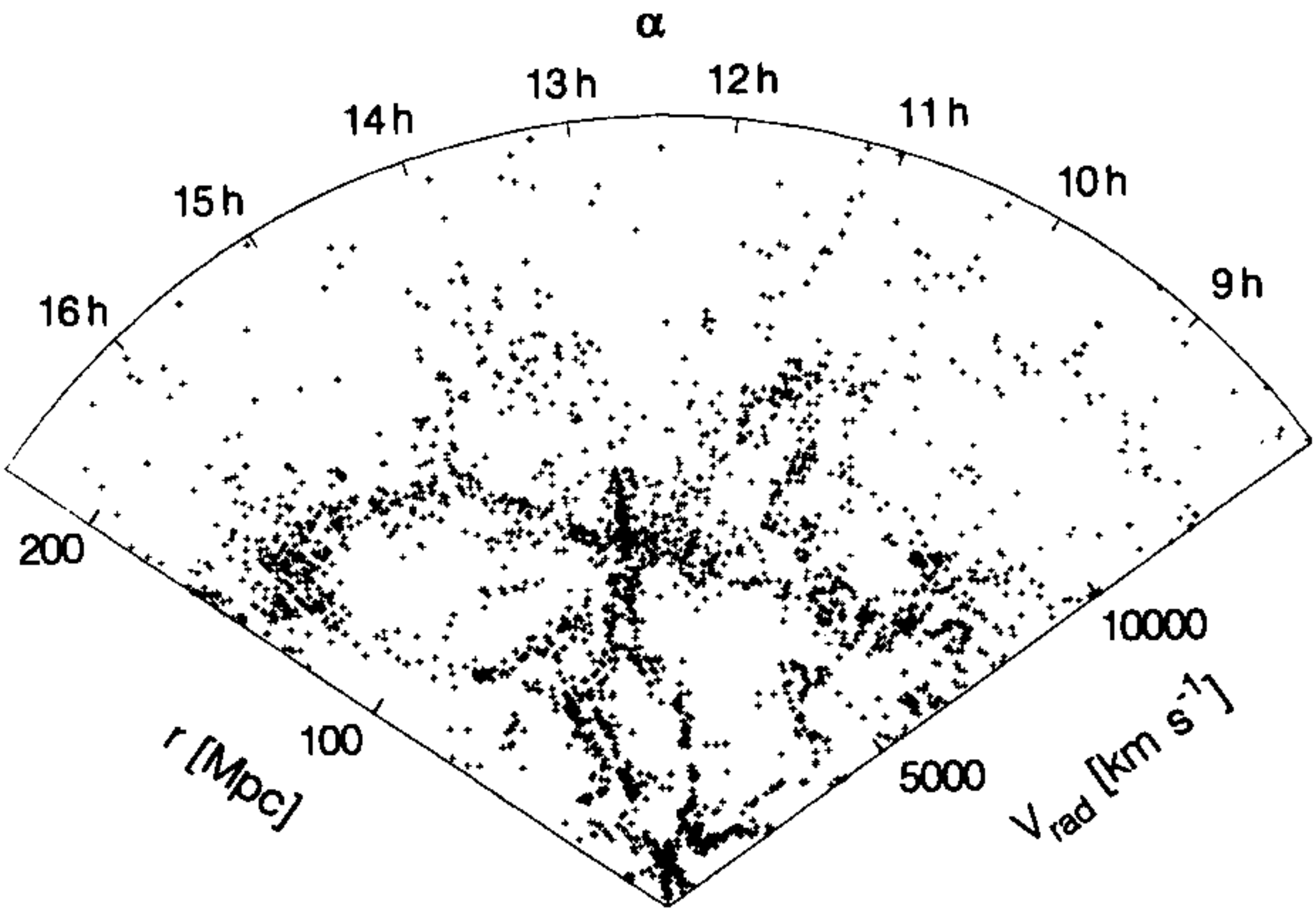
  La costante ha le dimensioni di T^{-1} ma la scelta delle unità in cui è espressa corrisponde alla velocità di una galassia distante 1 Mpc.
- L'interpretazione dello spostamento verso il rosso, *red-shift,* è possibile solo per piccoli valori di z, infatti a grandi distanze intervengono effetti di gravitazione.
- La relazione di Hubble implica la determinazione della distanza della sorgente luminosa dall'osservatore.

Cosmological Distance Ladder





$H_0 = 72\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$
10^3
10^2
10
1
D (Mpc)
0.001
0.01
0.10
z


α
13 h
12 h
14 h
11 h
15 h
10 h
16 h
9 h
200
10000
100
r [Mpc]
5000
V rad [km s-1]

Espansione di Hubble

L'integrazione della relazione $dr/dt = H_0 r$ conduce a $r = r_0\ e^{H0\ t}$

ovvero ad un tempo caratteristico $t_H = 1/H_0$ = 14 G anni.

A prima vista potrebbe sembrare che la relazione di Hubble implichi una visione "eliocentrica", ma non è cosi. Se si scrive la relazione tra vettori si ha

$$\mathbf{v} = H_0\mathbf{r}$$

con l'origine delle coordinate nella nostra Galassia. Un osservatore in un'altra galassia a distanza $\mathbf{r}_1$ e velocità $\mathbf{v}_1$ rispetto al nostro sistema, osserverà

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}_1 = H_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$$

e quindi osserva un Universo che si espande uniformemente.

Se si esprime la distanza al tempo t di una galassia con $r = R(t)\ r_0$, r è la coordinata in "co-espansione", misurata in un sistema di riferimento che espande anch'esso con l'Universo. r_0 è la distanza riferita ad una particolare galassia al tempo t_0, indipendente dal tempo. Il parametro R(t), fattore di scala, dipende solo dal tempo e in base al principio cosmologico è lo stesso in tutto lo spazio. Il suo valore al tempo presente è R(0)=1.

Difatti si ha

$$v = d(R\ r_0)/dt = dR/dt \cdot r_0 = dR/dt \cdot r/R(t)$$

Ovvero per $t=t_0$

$$v = [(dR/dt)/R]_0\ r = H_0 r$$

Cosmologia newtoniana

Sfera finita in espansione di raggio R(t), contenente la massa M.

Una galassia sulla superficie è attratta da M con la legge di Newton:

$$d^2R/dt^2 = -GM/R^2 \qquad [1]$$

dove $M = (4/3)\ \pi\ R(t)^3\ \rho(t)$

$\rho(t)$: densità di massa al tempo t

Moltiplicando ambo i membri per dR/dt e integrando si ottiene l'equazione di conservazione dell'energia:

$$1/2\ (dR/dt)^2 - GM/R = h$$

energia cinetica + energia potenziale = energia totale con h costante.

Ponendo la costante $h = -kc^2/2$ si ha:

$$[(dR/dt)/R]^2 = H^2 = -\ kc^2/R^2 + 8\pi/3\ G\ \rho(t)$$

Il termine [(dR/dt)/R] è il parametro di Hubble H(t), funzione del tempo.

Parametro di decelerazione

In aggiunta ad H, che caratterizza l'espansione, si definisce la quantità q(t) che descrive l'attrazione dovuta alla massa M, che si oppone all'espansione dell'Universo, ovvero il parametro di decelerazione

$$q(t) = -[(d^2R/dt^2) / R] / [(dR/dt) / R]^2 = -[(d^2R/dt^2) / R] / H(t)^2 \qquad [2]$$

con il valore attuale

$$q_0 = -\frac{1}{H_0^2}\frac{\ddot{R}_0}{R_0} = \frac{4}{3}\pi\frac{G\rho_0}{H_0^2}$$

dalle [1] e [2].

Nel tempo $t=1/H_0$ l'accelerazione $-q_0$ porta da v=0 alla velocità di espansione correntemente osservata

$$v_0 = R_0 H_0 = -\frac{\ddot{R}_0}{q_0}\cdot\frac{1}{H_0}$$

Equazione di Friedmann-Leimatre

Soluzione delle equazioni di Einstein assumendo un universo isostropo e omogeneo (principio cosmologico):

$$H^2 = - Kc^2/R^2 + 8\pi/3\ G\ \rho$$

L'elemento quadridimensionale di linea che in generale nella metrica di Riemann è dato da

$$ds^2 = \sum_{i,k} g_{ik} dx^i dx^k$$

si scrive come

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right]$$

La dipendenza temporale della geometria dipende esclusivamente dal fattore di scala R(t).

R(t) determina il raggio di curvatura dello spazio tridimensionale analogamente al raggio di curvatura di una superficie bidimensionale.

Ricordiamo l'equazione di conservazione dell'energia:

$$1/2\ (dR/dt)^2 - GM/R = -Kc^2/2$$

Per K=0, l'energia cinetica e potenziale si bilanciano e l'energia totale è nulla.

Per K>0 l'energia totale è negativa, l'universo è chiuso ed ha curvatura positiva. L'universo raggiunge un raggio massimo e poi si contrae.

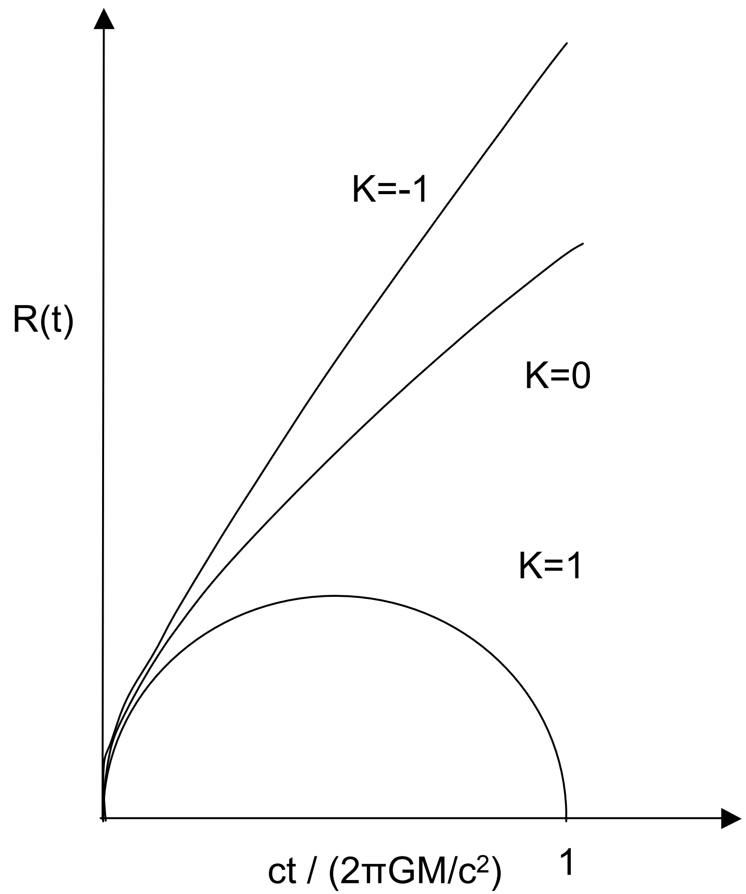
Per K<0 l'energia totale è positiva, l'universo si espande senza limite.

Fattore di scala R(t) vs t

Il termine Kc^2/R^2 è il termine di curvatura ed il parametro di curvatura K può assumere i valori

- 0 spazio euclideo, curvatura nulla
- 1 curvatura positiva, in 2D sfera
- -1 curvatura negativa, in 2D sella (iperboloide)

I dati attuali indicano che su grande scala, l'Universo è prossimo ad essere piatto, e quindi K≈0. (vedi WMAP, Wilkinson Microwave Anysotropy Probe)



Età dell’Universo

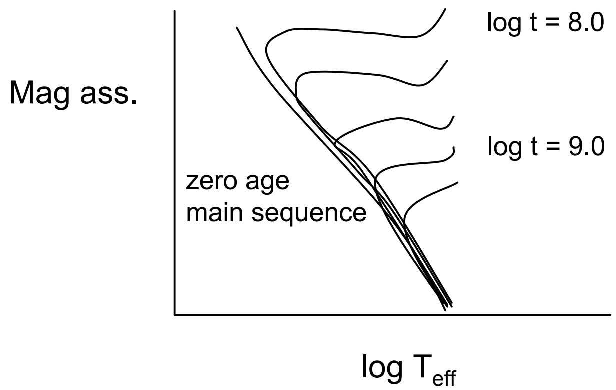
Nel caso K=0 e massa conservata M, si trova integrando eq. Friedmann:

$$R(t) = (9GM/2)^{1/3}\ t^{2/3}$$

da cui il tempo di Hubble $1/H_0 = R/dR/dt = 3t_0/2$

con i valori attuali di H si trova $t_0 \approx 10$ G yr

Le misure di magnitudo e indice di colore nelle stelle dei cluster globulari (ammassi di stelle $\approx 10^5$ in 40 pc) sono interpretabili in termini di evoluzione stellare. E’ possibile calcolare l’evoluzione delle stelle e quindi ottenere dalle curve m-indice l’età delle stelle (v. Perkins §7.3).



si trova $t_a \approx 12 \pm 2$ G yr

Età dell'Universo

Un secondo metodo per la stima dell'età dell'Universo si basa sulla composizione relativa dei radionuclidi con lunghe vite medie.

Ad esempio

radionuclide	$t_{1/2}$ (anni)
^{232}Th	$1.4\ 10^{10}$
^{238}U	$4.5\ 10^{9}$
^{244}Pu	$8.0\ 10^{7}$

Si assume che i radionuclidi siano stati prodotti in un tempo breve in quantità confrontabili. Dai rapporti di radionuclidi con vite medie molto diverse, si risale all'indietro fino ad ottenere un rapporto ≥ 1.

Esempio: oggi $^{235}U / ^{238}U = 1/138$ da cui $t \approx 10^9$ per avere un rapporto >1.

R. Cayrel et al. da U e Th in una stella molto vecchia ottengono

$$t_a = (12.5\pm3)\ 10^9 \text{ anni}$$

Densità di energia

Soluzione delle equazioni di Einstein assumendo un universo isostropico e omogeneo:

$$H^2 = - Kc^2/R^2 + 8\pi/3 \; G \rho \qquad (*)$$

$$H=(dR/dt)/R$$

Il termine Kc^2/R^2 è il termine di curvatura ed il parametro di curvatura K può assumere i valori 0, 1, -1.

La conservazione dell'energia del fluido cosmico perfetto in dV è data da dE = -PdV dove P è la pressione.

Ovvero

$$d(\rho c^2 R^3) = -Pd(R^3) \qquad (**)$$

ovvero

$$\dot{\rho} = -3\left(\frac{\dot{R}}{Rc^2}\right)(P + \rho c^2)$$

Differenziando (*) e imponendo la conservazione dell'energia

$$(d^2R/dt^2)/R = - (4/3 \; \pi G)\; (\rho + 3P/c^2)$$

$$\text{con } \rho_{tot} = \rho_m + \rho_r$$

In contrasto con la cosmologia newtoniana ora ρ contiene tutte le forme di energia, in accordo con la teoria della relatività generale.

Costante cosmologica

Se si aggiunge un termine $\Lambda/3 = (8\pi/3)\, G\rho_v$ a destra della (*),

Λ costante cosmologica,

si ha

$$\rho_{tot} = \rho_m + \rho_r + \rho_v$$

dove $\rho_v = \Lambda/\, 8\pi G$.

Per R sufficientemente grandi si ha dalla (*):

$$dR/R = (\Lambda/3)^{1/2}\, dt$$

ovvero $R \propto \exp[(\Lambda/3)^{1/2}\, t]$, l'espansione diventa esponenziale.

Vi sono evidenze che Λ sia diverso da zero con $\rho_v > \rho_m$.

Equazioni di stato

- La pressione P e la densità ρ sono connesse dalle equazioni di stato.
- Per materia non relativistica, l'equazione di stato è dedotta esattamente come nel caso di un gas non relativistico contenuto in un volume di lato L e cioè

$$P=1/3\ m\ n\ \langle v^2\rangle$$

dove n è il numero di molecole per unità di volume.

La densità di energia cinetica è $\varepsilon=1/2\ mn\ \langle v^2\rangle=1/2\ \rho c^2\ \langle v^2/c^2\rangle$

quindi $$P = 2/3\ \varepsilon = 2/3\ \rho c^2\ \langle v^2/c^2\rangle$$

Poiché per la materia cosmica $v \ll c$, la pressione che esercita è molto piccola.

- Se le particelle hanno velocità relativistiche, si ha

$$P = 1/3\ m\ n\ c^2 = 1/3\ \rho c^2$$

In questo caso si parla di pressione di radiazione.

Energia del vuoto

Il vuoto esercita anch'esso una pressione dovuta alla creazione di coppie di particelle antiparticelle ed il vuoto è definito come lo stato di minima energia possibile. La relazione pressione-densità di materia si può giustificare con una considerazione di plausibilità.

Supponiamo di avere un recipiente con vuoto di densità di energia ρc^2. Se con un pistone aumentiamo il volume di dV, si ha un aumento dell'energia del vuoto di $\rho c^2 dV$ che deve essere fornita dal lavoro della pressione PdV e quindi

$$P = -\rho c^2$$

Dall'equazione di conservazione dell'energia dE = -PdV, sostituendo la densità di energia $d(\rho c^2 R^3) = PdR^3$, si ottiene, vedi (**),

$$\dot{\rho} = -3\left(\frac{\dot{R}}{Rc^2}\right)\left(P + \rho c^2\right) = 0$$

da cui nel caso del vuoto ρ= cost.

Equazioni di stato

Regime dominante	**Equazione di stato**	**Densità di energia**
Radiazione	$P = 1/3 \ \rho c^2$	$\rho \propto R^{-4}$
Materia	$P = 2/3 \ \rho c^2 \langle v^2/c^2 \rangle$	$\rho \propto R^{-3}$
Vuoto	$P = - \rho c^2$	$\rho \propto \text{cost}$

Costante cosmologica

Per K = 0, la

$$H^2 = - Kc^2/R^2 + 8\pi/3\ G\ \rho \qquad (*)$$

dà il valore per la densità critica che chiude l'Universo:

$$\rho_c = 3H_0^2/8\pi G = 5.1\ \text{GeV m}^{-3}$$

Il rapporto ρ/ρ_c si chiama parametro di chiusura. Dalla (*), per t_0 e per K qualunque si ha

$$\Omega = \rho_{tot}/\rho_c = 1 + Kc^2/[H_0R(0)]^2$$

Ritroviamo che per K = 0, $\Omega = 1$.

La costante cosmologica Λ ($\rho_v = \Lambda/8\pi G$) può essere interpretata nel quadro della teoria quantistica dei campi in termini di densità di energia del vuoto. Il principio di indeterminazione richiede che il vuoto contenga particelle-antiparticelle che si manifestino per un tempo tale che $\Delta t \Delta E \leq h/2\pi$. Di conseguenza il vuoto può possedere una densità di energia attraverso le coppie particelle antiparticelle che si manifestano temporaneamente.

Costante cosmologica

Il parametro di decelerazione q(t), inserendo le relazioni della tabella precedente, si può anche scrivere come

$$q=(4\pi G/3c^2H^2)[\rho c^2+3p]=(2/\rho_c c^2)\,[\rho c^2+3p]=\Omega_m/2+\Omega_r-\Omega_v$$

Trascurando la densità di radiazione, perché attualmente molto piccola, una costante Λ=0 porta ad una decelerazione dell'Universo e per K=0,

$$\Omega_m=1 \text{ e } q=0.5.$$

Ma se Λ è sufficientemente grande, si ha una accelerazione dell'espansione e l'energia del vuoto avrebbe l'effetto di una gravitazione repulsiva.

Densità di energia

I contributi alla densità, ovvero al parametro di chiusura Ω si possono identificare con:

- Ω_{rad}: al tempo presente la densità di radiazione è trascurabile $\Omega_{rad} \approx 5 \times 10^{-5}$
- Ω_{lum}: materia barionica luminosa (protoni, neutroni, nuclei che formano stelle, gas e polveri).
  Si calcola $\Omega_{lum} \approx 0.01$
- Ω_{bar}: materia barionica totale, visibile o invisibile, come calcolata dalla nucleosintesi, $\Omega_{bar} \approx 0.05$
- Ω_{m}: densità totale di materia come si calcola dal potenziale gravitazionale delle galassie e dalla cinematica delle strutture a grande scala dell'Universo. $\Omega_{m} \approx 0.30$
- Ω_{v}: densità di energia del vuoto, stimata dal plot di Hubble (velocità vs distanza) per supernove a grandi red-shift e dalle fluttuazioni del fondo di radiazione cosmica. $\Omega_{v} \approx 0.70$

La maggior parte della materia dell'Universo non è visibile e i barioni sono solo il 15% della materia. I non-barioni sono circa l'85% e sono definiti *materia oscura.*

Il termine di curvatura può essere espresso analogamente con

$$\Omega_k = -Kc^2/[H_0^2R(0)^2]$$

Età dell'Universo

L'equazione di Friedmann si può mettere nella forma:

$$H(t)^2 = 8\pi/3\ G[\rho_m(t) + \rho_r(t) + \rho_v(t) + \rho_k(t)]$$

dove $\rho_k = -(3/8\pi)\ Kc^2/GR^2$;

ovvero usando $R(0)/R(t) = (1+z)$

$$H(t)^2 = H_0^2\ [\Omega_m(0)(1+z)^3 + \Omega_{rad}(0)(1+z)^4 + \Omega_v(0) + \Omega_k(0)(1+z)^2]$$

e le dipendenze da R di ρ per la materia ($\propto R^{-3}$), la radiazione ($\propto R^{-4}$) ed il termine di curvatura ($\propto R^{-2}$).

La dipendenza della densità della radiazione da R ha un fattore 1/R in più dovuto al red shift.

$$1/R\ dR/dt = H = -[(dz/dt)/(1+z)]$$

$$\text{cioè } dt = -\ dz/H(1+z)$$

che integrata da z=0 a z dà $t_0 - t = 1/H_0 \cdot \int dz/(1+z)H(t)$.

Per calcolare l'età dell'Universo si pone t=0 e l'estremo superiore dell'integrale si pone $z \longrightarrow \infty$.

L'integrale si può calcolare anche analiticamente nel caso K=0, $\Omega_{rad} \ll 1$, $\Omega_m = 0.30 = \Omega$, $\Omega_v = 0.70 = 1-\Omega$ con la sostituzione

$$\Omega(1+z)^3/(1-\Omega) = \tan^2\theta; \qquad \sin 2\theta = 2\tan\theta/(\tan^2\theta+1).$$

Infine si trova $t_0 = (13.5 \pm 2)$ Gyr.