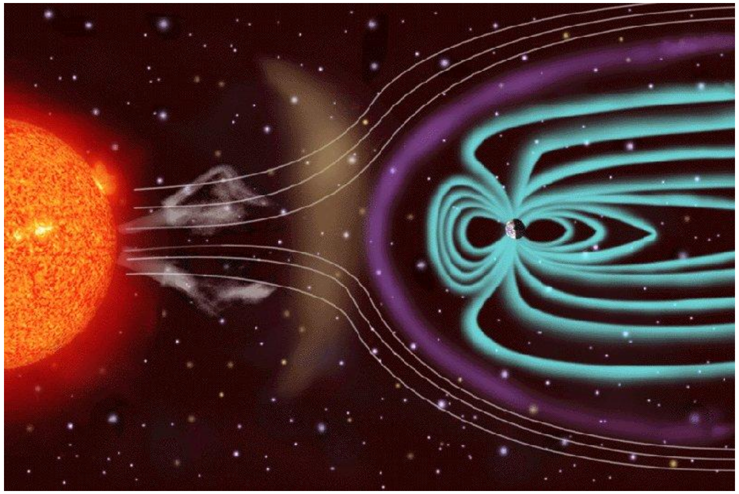
Corso di Astrofisica e particelle
Prof. Bruno Borgia
A.A. 2010/2011

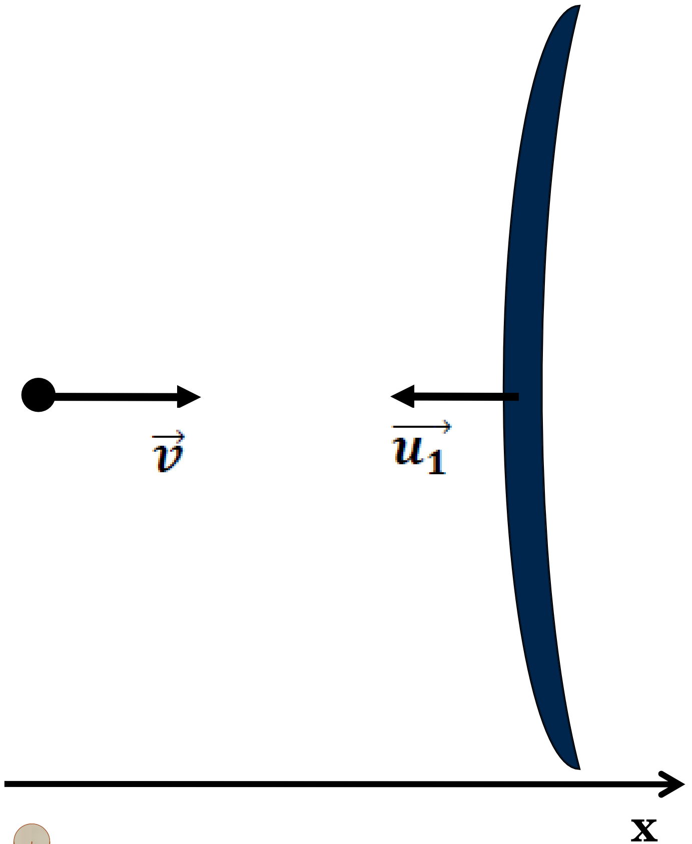
Incremento di energia in seguito all'urto con un'onda di shock



Chiara Perrina

Esercizio 6.14 del Perkins

Mostrare che una particella carica che viaggia nella direzione delle x positive con una velocità relativistica $\vec{v}$ quando viene scatterata all'indietro da un fronte di shock che si muove nella direzione delle x negative con una velocità non relativistica $\overrightarrow{u_1}$ riceve un incremento dell'energia dell'ordine di u_1/c.

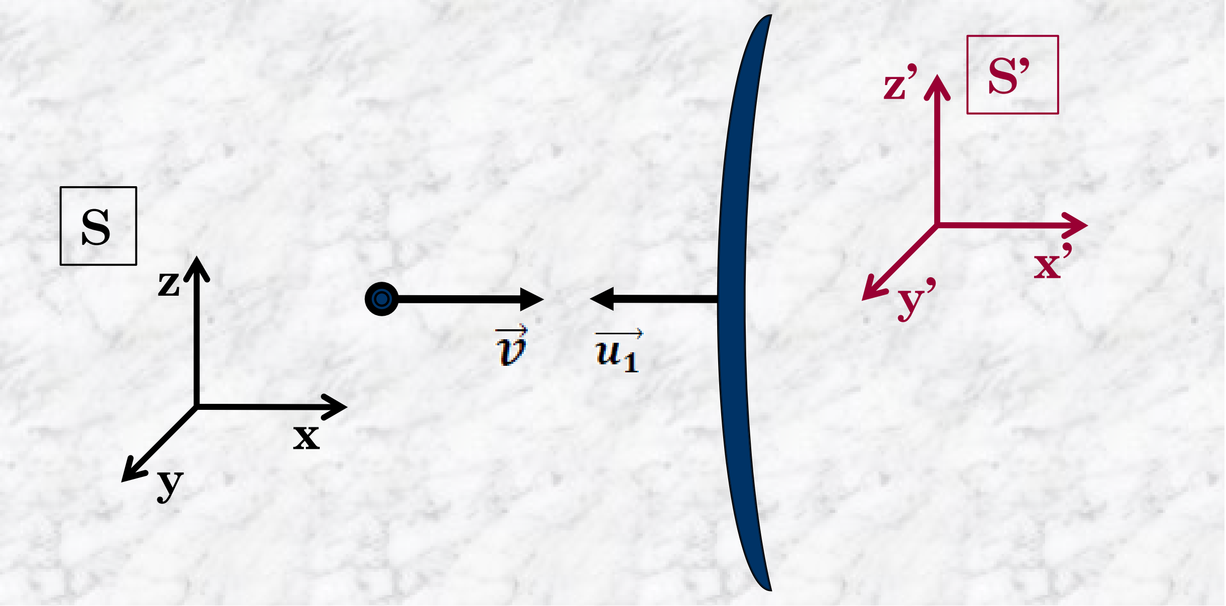


$$\frac{\Delta E}{E} \propto \frac{u_1}{c}$$

Soluzione

Utilizziamo l'approssimazione di onda piana per l'onda di shock con massa M >> massa particella.

Consideriamo il processo in due sistemi di riferimento (S e S'):
S = sistema di riferimento dell'osservatore (la Galassia),
S' = sistema di riferimento dell'onda di shock.



In **S'** l'urto è elastico.

Soluzione

I quadrivettori energia-impulso nei due sistemi S e S' sono legati dalle trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{pmatrix} E'/c \\ p_x{}' \\ p_y{}' \\ p_z{}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$\beta = V_{S'}/c$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Nel nostro caso: $V_{S'} = -u_1 \Rightarrow \beta = \frac{V_{S'}}{c} = -\frac{u_1}{c},\ p_x = p,\ p_y = p_z = 0$

Sostituendo, si ottiene:

$$\begin{pmatrix} \frac{E'}{c} \\ p_x{}' \\ p_y{}' \\ p_z{}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \frac{u_1}{c}\gamma & 0 & 0 \\ \frac{u_1}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\frac{E}{c} + \frac{u_1}{c}\gamma p \\ \frac{u_1}{c}\gamma\frac{E}{c} + \gamma p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} E' = \gamma(E + u_1 p) \\ p_x{}' = p' = \gamma\left(\frac{u_1}{c^2}E + p\right) \end{array}}$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \gamma(E' - u_1 p')} \Rightarrow \boxed{E_f = \gamma\left(E'_f - u_1 p'_f\right)}$$

$$E = \gamma(E' - u_1 p') \Rightarrow \boxed{E_f = \gamma\left(E'_f - u_1 p'_f\right)}$$

Dato che in **S'** l'urto è elastico $\begin{matrix} E'_f = E' \\ p'_f = -p' \end{matrix}$.

$$E_f = \gamma(E' + u_1 p') = \gamma\left[\gamma(E + u_1 p) + u_1\gamma\left(\frac{u_1}{c^2}E + p\right)\right] = \gamma^2\left(E + u_1 p + \frac{{u_1}^2}{c^2}E + u_1 p\right) =$$

$$= \gamma^2\left(E + \frac{{u_1}^2}{c^2}E + 2u_1 p\right).$$

Calcoliamo l'incremento di energia

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{E_f - E}{E} = \frac{\gamma^2\left(E + \frac{{u_1}^2}{c^2}E + 2u_1 p\right) - E}{E} = \gamma^2\left(1 + \frac{{u_1}^2}{c^2} + \frac{2u_1 p}{E}\right) - 1 =$$

$$= \left[\begin{matrix} p = mv\gamma \\ E = mc^2\gamma \end{matrix}, \quad \frac{p}{E} = \frac{v}{c^2}\right] = \gamma^2\left(1 + \frac{{u_1}^2}{c^2} + \frac{2u_1 v}{c^2}\right) - 1 =$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{{u_1}^2}{c^2}}\left(1 + \frac{{u_1}^2}{c^2} + \frac{2u_1 v}{c^2}\right) - 1 \cong \left[\frac{1}{1 - \beta^2} \overset{\beta \ll 1}{\cong} 1 + \beta^2\right] \cong$$

$$\cong \left(1 + \frac{{u_1}^2}{c^2}\right)\left(1 + \frac{{u_1}^2}{c^2} + \frac{2u_1 v}{c^2}\right) - 1 \cong \left(1 + \frac{{u_1}^2}{c^2} + \frac{2u_1 v}{c^2} + \frac{{u_1}^2}{c^2} - 1\right) =$$

$$= \left(2\frac{u_1^2}{c^2} + \frac{2u_1 v}{c^2}\right) \overset{v \cong c}{\cong} 2\frac{u_1}{c}.$$