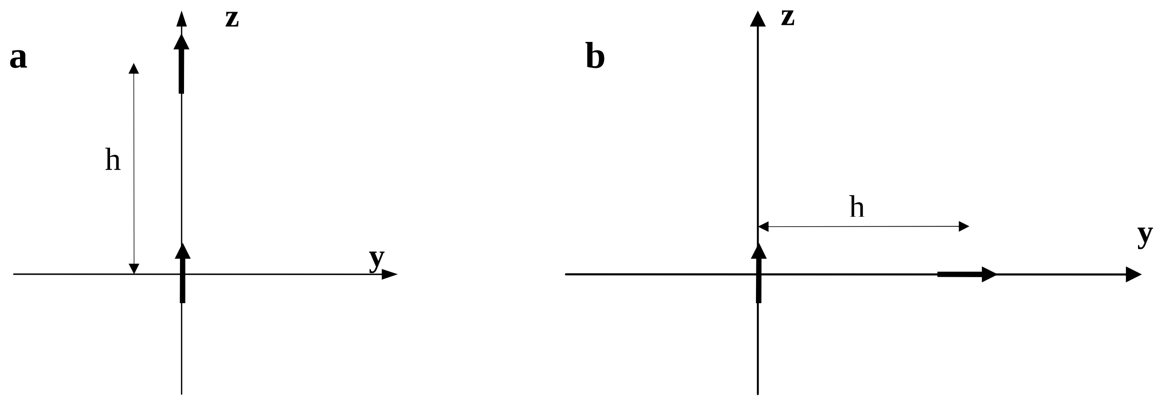
Prova scritta del 3 febbraio 2011

Prof. Carlo Cosmelli

Esercizio n.1 **[10 punti]**

Due dipoli elettrici uguali |p|=qd di piccole dimensioni sono posti paralleli e sullo stesso asse a distanza h (vedi schema a).



1) Determinare la forza con cui attraggono supponendo h>>d. **[4,5 punti]**

2) Se invece sono posti alla stessa distanza, ma con le direzioni ortogonali (vedi schema b), quale è il momento della forza che si esercita tra di loro? **[5,5 punti]**

Dati: $|p| = 10^{-10}$ C·m , h = 1cm.

Soluzione

1) Scegliamo un sistema di coordinate con l'origine sul centro del primo dipolo e con l'asse ***z*** diretto come l'asse dei dipoli. Il potenziale di un dipolo, a grande distanza dal centro, scritto in coordinate polari (r, θ, φ), vale:

$$V(\bar{r}) = k \cdot \frac{\bar{p} \cdot \bar{r}}{r^2} = k \frac{p\cos\theta}{r^2} \qquad \text{, dove} \quad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

Il campo elettrico, che sull'asse ***z*** avrà la sola componente $\mathbf{E_z \neq 0}$, sarà $E_r = E_z = -\frac{\partial V}{\partial r} = k\frac{2p\cos\theta}{r^3}$, le altre componenti essendo nulle.

Lungo l'asse ***z*** si ha θ**=0**, quindi $\mathbf{E_z = 2kp/z^3}$ e la forza sul dipolo **p** sarà:

$$\bar{F} = \nabla(\bar{E} \cdot \bar{p}) \quad \text{quindi} \quad F_z = \frac{\partial(\bar{E} \cdot \bar{p})}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2kp^2}{z^3}\right) = -6k\frac{p^2}{z^4} = -\frac{3}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p^2}{h^4}$$

Soluzione alternativa: si può calcolare la forza sul dipolo come somma delle due forze sulle due cariche +q e –q che compongono il dipolo, poste a distanza d, nell'approssimazione d<<h:

$$F_z = F_- + F_+ = -q \cdot E(r - d/2) + q \cdot E(r + d/2) = 2kpq\left[\frac{1}{(r + d/2)^3} - \frac{1}{(r - d/2)^3}\right] \cong$$

$$= \frac{2kpq}{r^3}[(1 - 3d/2r) - (1 + 3d/2r)] = \frac{2kpq}{r^3} \cdot \frac{-3d}{r} = -6k\frac{p^2}{r^4}$$

Numericamente risulta:

$$F_z = -\frac{3p^2}{2\pi\varepsilon_0 h^4}\frac{3 \cdot 10^{-20}}{2 \cdot \pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot (10^{-2})^4} = 0{,}054 \quad N$$

2) Se i due dipoli sono ortogonali, assunto come asse delle y l'asse lungo cui sono disposti i loro centri, il primo dipolo genera un campo su tale asse, quindi in z=x=0:

$$\overline{E}(0, y, 0) = E_z(y) = -kp\frac{\hat{z}}{y^3}$$

che quindi produce un momento sul secondo dipolo pari a:

$$\overline{M} = \overline{p} \times \overline{E} = p\hat{y} \times \left(-\frac{kp}{y^3}\right)\hat{z} = -k\frac{p^2}{y^3}\hat{x}$$

Quindi :

$$\left|\overline{M}\right| = k\frac{p^2}{h^3}\hat{x} = \frac{10^{-20}}{4\pi\varepsilon_0 (10^{-2})^3} = 9.10^{-5} \ Nm$$

Esercizio n.2 [7 punti]

Una lastra di Rame, in cui il numero di elettroni liberi nell'unità di volume vale ***n***, genera un campo elettrico vicino alla sua superficie di intensità pari a E_0. Determinare lo spessore dello strato di elettroni necessario a generare un tale campo.

[Dati: ***n=8,5 ·10^{28} elettroni/m^3 ; E_0= 10^7 V/m***]

Soluzione

La densità di carica di volume degli elettroni liberi vale:

$$\rho = n \cdot e = 1{,}36 \cdot 10^{10} \quad C/m^3$$

In realtà una densità di carica superficiale σ, idealmente di spessore nullo, può essere sempre descritta da una densità di carica di volume ρ con un "piccolo" spessore t:

$$dq = \sigma \cdot ds = \rho \cdot t \cdot ds \quad ; \quad \text{quindi } \sigma = \rho \cdot t$$

Il relativo campo elettrico superficiale sarà quindi, utilizzando il teorema di Coulomb:

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\rho \cdot t}{\varepsilon_0}$$

da cui si può calcolare il valore di ***t:***

$$t = \frac{E_0 \cdot \varepsilon_0}{\rho} = \frac{10^7 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}{1{,}36 \cdot 10^{10}} = 6{,}5 \cdot 10^{-15} \quad m$$

Esercizio n.3 [13 punti]

In un piano orizzontale sono poste due guide rigide conduttrici parallele e infinite collegate ad un estremo da un elemento conduttore di lunghezza ***L.*** Sopra queste guide è poggiata una sbarretta conduttrice rigida, di massa ***m***, libera di muoversi in direzione perpendicolare alle guide. Si supponga che l'origine **O** del sistema di riferimento sia posto nel punto dove le due guide sono in contatto (vedi figura). Tutto il sistema è immerso in un campo magnetico costante non uniforme $\overline{B} = b \cdot x\, \hat{z}$, perpendicolare quindi al piano orizzontale.

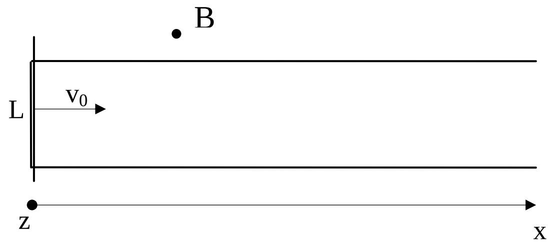
Sia la sbarretta mobile che il tratto che unisce le due guide hanno resistenza trascurabile, mentre le due guide hanno una resistenza λ per unità di lunghezza variabile: $\lambda(x)=\rho\cdot x$.

All'istante t=0 la sbarretta si trova nella posizione x=0, e possiede una velocità $v = v_0 \cdot \hat{x}$.

a) Scrivere l'andamento della velocità della sbarretta in funzione del tempo, e di calcolarne il valore al tempo t*=5 s. [10 punti]

b) Calcolare l'energia dissipata per effetto Joule dopo un tempo t molto maggiore di 1'.[3 punti]

Dati: L= 10 cm ; m=10 g ; v_0= 4,1 cm/s ; b= 1 T/m ; ρ= 10 Ω/m^2



Soluzione

La sbarretta mobile è immersa in un campo magnetico B, essendo in moto il flusso di B attraverso la superficie individuata dalla sbarretta e dalle guide varierà, generando quindi una f.e.m. indotta f, e una corrente i, che dipenderanno dalla posizione x della sbarretta:

$$f_{em}(x) = -\frac{d\phi(B)}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\int_0^x bLxdx\right) = -\frac{d}{dt}(bLx^2/2) = -bL \cdot x\frac{dx}{dt}$$

$$i(x) = \frac{f_{em}(x)}{R}$$

La Resistenza R di un tratto di guida lungo x sarà:

$$dR = \lambda(x) \cdot dx = \rho \cdot x \cdot dx \qquad \text{da cui} \qquad R_1(x) = \frac{1}{2}\rho\, x^2$$

Per i due tratti della guida la resistenza totale fra 0 e x sarà quindi:

$$R(x)=\rho\, x^2$$

E la corrente i, nel punto x, sarà:

$$i(x) = \frac{f_{em}(x)}{R(x)} = -bL \cdot x\frac{dx}{dt} \cdot \frac{1}{\rho\, x^2}$$

Questa corrente sarà diretta in verso orario in modo da opporsi alla variazione del flusso di **B**.

La sbarretta mobile sarà quindi sottoposta ad una forza **F** dovuta all'interazione fra la corrente **i** che la attraversa e il campo **B**:

$$\overline{F} = i\,\overline{L} \times \overline{B} = -bL \cdot x\,\frac{dx}{dt} \cdot \frac{1}{\rho\, x^2} \cdot L \cdot b\,x\;\hat{x} = -\frac{b^2\,L^2}{\rho}\frac{dx}{dt}\;\hat{x}$$

La forza sarà diretta in verso contrario alla velocità inziale v_0.

L'equazione del moto sarà:

$$F_x = m\,a_x \quad \text{quindi} \quad -\frac{b^2\,L^2}{\rho}\frac{dx}{dt} = m\,\frac{dv}{dt}$$

$$v = -\frac{m\,\rho}{b^2\,L^2} \cdot \frac{dv}{dt} \quad \text{che, scrivendo} \quad \tau = \frac{m\,\rho}{b^2\,L^2} \quad \text{diventa}$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dt}{\tau} \quad \text{da cui :}$$

$$\ln\left(v(t)/v_0\right) = -t/\tau \quad \text{e} \quad v(t) = v_0 \cdot e^{-t/\tau}$$

Il tempo caratteristico τ vale:

$$\tau = \frac{m\,\rho}{b^2\,L^2} = \frac{10^{-2} \cdot 10}{2 \cdot 10^{-2}} = 10\ s$$

Al tempo t* = 5 s = τ la velocità iniziale si sarà ridotta di $\sqrt{1/e}$ quindi sarà:

$v(t=\tau) = v_0/\sqrt{e}$ = 4,1/1,65 = 2,5 cm/s

Dopo un tempo un tempo molto maggiore di 60", quindi molto maggiore di 6 costanti di tempo, la velocità sarà praticamente nulla, l'energia dissipata sarà quindi uguale all'energia cinetica iniziale.

$$E_J = E_c(t=0) = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}10^{-2} \cdot 0{,}168 = 8{,}4 \cdot 10^{-4}\ J$$