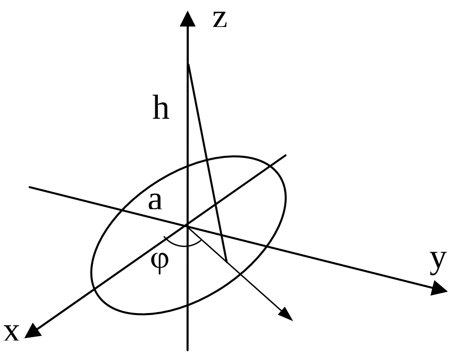
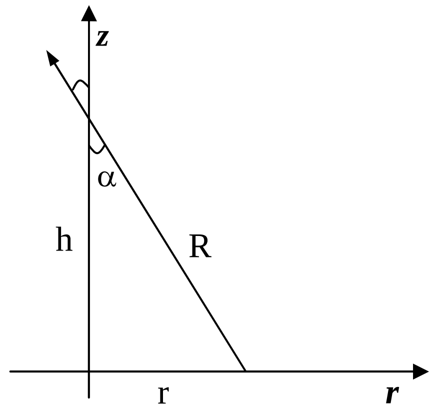
Esercizio n.1 [10 punti]

Un disco sottile isolante di raggio ***a***, centro ***O (0,0,0)***, giacente nel piano (x,y), è ricoperto da una densità di carica superficiale $\sigma = \sigma_0 \sin^2\varphi$, dove φ è l'angolo formato da una semiretta del piano x,y uscente dall'origine, con l'asse delle x. Determinare il campo Elettrico nel punto z(0,0,h) sull'asse del disco. Calcolare quindi il valore di ***E*** per $a \to \infty$ e giustificare il valore ottenuto.

Soluzione





L'elemento di superficie del disco, a distanza ***r*** dal centro, individuato dall'angolo φ e di lati ***dr*** e ***rdφ*** avrà una carica infinitesima: $dq = \sigma \cdot ds = \sigma_0 \sin^2\varphi \cdot r d\varphi \cdot dr$. Il campo elettrico infinitesimo, in un punto ***h*** dell'asse ***z*** sarà quindi:

$d\overline{E} = k\dfrac{\sigma_0 \sin^2\varphi \cdot r d\varphi \cdot dr}{R^2}\left(\cos\alpha\cdot\hat{z} + \sin\alpha\cdot\hat{r}\right)$, dove $k = 1/4\pi\varepsilon_0$. La componente radiale ***r*** avrà in totale risultante nulla, essendoci per ogni elemento in α un contributo eguale e contrario in $-\alpha$, la componente verticale sarà:

$dE_z = \displaystyle\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} k\frac{\sigma_0 \sin^2\varphi \cdot r d\varphi \cdot dr \cos\alpha}{R^2} = \frac{1}{4\varepsilon_0}\frac{\sigma_0 r \cos\alpha \cdot dr}{R^2}$ integrando per $0 \le r \le a$, avendo fatto le sostituzioni: $h = R\cos\alpha$, $r = h\tan\alpha$, $dr = hd\alpha/\cos^2\alpha$ si ha:

$$E(h) = \int_0^{\alpha_{max}} \frac{\sigma_0}{4\varepsilon_0}\sin\alpha\, d\alpha = \frac{\sigma_0}{4\varepsilon_0}\left[1-\cos\alpha_{max}\right] = \frac{\sigma_0}{4\varepsilon_0}\left[1-\frac{h}{R_{max}}\right] = \frac{\sigma_0}{4\varepsilon_0}\left[1-\frac{h}{\sqrt{h^2+a^2}}\right] =$$

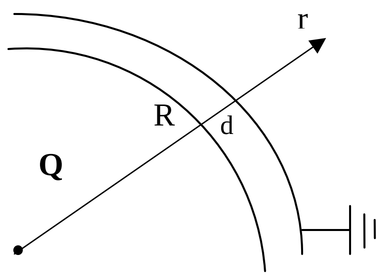
Per $a \to \infty$ si ha: $E(h) = \dfrac{\sigma_0}{4\varepsilon_0} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\right)$, cioè un campo costante uguale a metà di quello generato da una distribuzione infinita σ_0. Il fattore "2" deriva dal valor medio della funzione sen$^2\alpha$.

Esercizio n.2 [12 punti]

Si consideri una sfera isolante di costante dielettrica relativa ε_r e raggio R, con una carica elettrica Q distribuita uniformemente in tutto il suo volume. La superficie esterna della sfera è ricoperta da una sottile corona metallica di spessore d<<R con l'esterno collegato a terra (a massa). Si calcoli:

1) Il campo elettrico $\overline{E}$ e il potenziale elettrostatico V in tutto lo spazio.
2) La densità di cariche superficiali indotte sulla superficie metallica.
3) La densità di cariche di polarizzazione nella sfera e sulla sua superficie.
4)

Dati: ε_r *=1,5 ; R= 1 cm ; Q=1·10⁻⁹ C*



Soluzione

La densità di carica di volume all'interno della sfera sarà tale che $\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 = Q$

Mentre in tutto lo spazio interno alla sfera avrò per il teorema di Gauss: $\phi(D) = Q_{\text{int}}(libere)$

Queste due relazioni mi danno: $4\pi r^2 D(r) = Q(r) = \rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3$ da cui si ha $D(r) = \frac{Qr}{4\pi R^3}$

Quindi per $r < R$: $E(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{Qr}{4\pi R^3}\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = 6\cdot 10^6\cdot r \ \ V/m$ con versore r positivo.

Per $r \geq R$ posso scegliere una superficie interna alla corona metallica, in cui il campo elettrico E, così come il vettore induzione elettrica D, saranno uguali a zero. Questo vuol dire che, applicando il teorema di Gauss, avrò all'interno della superficie metallica: $\phi(D) = Q_{\text{int}}(libere) = 0$, ma le cariche interne sono la somma delle cariche libere contenute nella sfera più le cariche libere indotte sulla superficie interna della sfera, tali da verificare quindi la relazione: $Q(sfera) + Q(indotte) = 0$, da cui : $Q(indotte) = -Q$. Quindi per $r \geq R$, $E(r) = 0$. La superficie esterna è a massa, quindi non ci sono cariche, ed il campo esterno, così come il potenziale, saranno nulli.

Calcolo del potenziale: $V(r) = -\int E(r)dr = -\frac{Q}{4\pi R^3}\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{r^2}{2} + c\right)$; il valore di c si calcola imponendo $V(R)=0$, da cui si ha $V(r) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{1}{R}\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right) = V_0\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$,essendo V_0*=3V.*

La densità di carica superficiale indotta sulla superficie interna della sfera sarà:

$$\sigma_I = -\frac{Q}{4\pi R^2} = -0{,}80\cdot 10^{-6}\ C/m^2 \quad \text{(negativa).}$$

La densità delle cariche di polarizzazione superficiali per la sfera dielettrica sarà:

$\sigma_P = \overline{P}\cdot\hat{n} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}D(R) = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\frac{Q}{4\pi R^2} = 0{,}26\cdot 10^{-6}\ C/m^2$; mentre per le cariche di polarizzazione di volume:

$$\rho_P(r) = -div\overline{P} = -div\left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\overline{D}(r)\right) = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 D(r)}{\partial r}\right) = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\frac{3Q}{4\pi R^3} = -79{,}6\ C/m^3$$

Esercizio n.3 **[8 punti]**

Un anello sottile di raggio ***R*** ha resistenza nulla (è un superconduttore). L'anello si trova inizialmente immerso in un campo magnetico ***B*** costante ed uniforme parallelo al piano dell'anello. Poi l'anello viene ruotato di ***90⁰*** in modo che ***B*** risulti perpendicolare al piano dell'anello. Per fare questa operazione si spende una energia ***W.*** Calcolare l'intensità della corrente ***i*** che si stabilisce nell'anello e il suo coefficiente di autoinduzione ***L***.

Dati: R=1 cm ; B=1 10^{-4} Wb/m^2 ; W= 10^{-4} J

Soluzione

Essendo nulla la resistenza della spira non c'è energia dissipata per effetto Joule. Quindi tutta l'energia spesa servirà a creare la corrente i:

$$W = \frac{1}{2} L\, i^2 \tag{1}$$

essendoci due incognite serve un'altra relazione che può essere trovata utilizzando il fenomeno che genera la corrente ***i.*** L'equazione del circuito è:

$$f_{em} = 0 \rightarrow f_{em}(indotta) + f_{em}(autoindotta) = 0 \quad ,(Ri = 0)\,;$$ ma

$$f(indotta) = -\frac{d\phi(B)}{dt} \quad e \quad f(autoindotta) = -L\frac{di}{dt}$$ quindi: $$-\frac{d\phi(B)}{dt} = L\frac{di}{dt}$$ e

$$-d\phi(B) = Ldi$$ che, integrando, diventa:

$$-\phi_{max}(B) = Li \quad , \quad -B\,\pi\,R^2 = Li$$ quindi

$$i = -\frac{B\pi\, R^2}{L}$$ che, inserita nella (1), da:

$$L = \frac{\left(B\pi\, R^2\right)^2}{2W} = \frac{\left(10^{-4}\cdot 3.1416\cdot 10^{-4}\right)^2}{2\cdot 10^{-4}} \cong 4{,}9\cdot 10^{-12} \quad H$$

Mentre $$i = \sqrt{\frac{2W}{L}} = \frac{2\,W}{B\pi\, R^2} = \sqrt{\frac{2\cdot 10^{-4}}{4{,}9\cdot 10^{-4}}} = 6{,}4\cdot 10^3 \quad A$$