PDF-XChange Click to buy NOW! www.tracker-software.com

Esercizio n.1 [10 punti]

Una superficie piana quadrata è posta nel piano situato a $z = -3\ m$, mentre il quadrato è definito da: $-2 \le x \le 2\ m$; $-2 \le y \le 2\ m$. La superficie è carica con densità di carica superficiale $\sigma = 2\,(x^2 + y^2 + 9)^{3/2}\ nC/m^2$. Calcolare il valore del campo elettrostatico (in modulo e direzione) nell'origine O(0,0,0).

Soluzione

Si consideri un elemento di superficie infinitesima $ds = dx\,dy$ della superficie. Il campo E generato dalla carica infinitesima $dq = \sigma ds$ posta su questa superficie sarà: $d\bar{E} = k\frac{dq}{r^2}\hat{r}$ dove $k = 1/4\pi\varepsilon_0$ ed r è il vettore fra la superficie ds e l'origine O.

Esplicitando i termini si ha: $d\bar{E} = k\frac{\sigma dxdy}{r^2}\frac{\bar{r}}{|r|}$: dove $\bar{r} = (-x\hat{x} - y\hat{y} + 3\hat{z})$; $|r| = \sqrt{x^2 + y^2 + 9}$

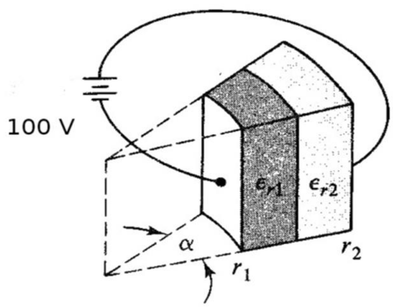
Si avrà quindi: $d\bar{E} = k\frac{\sigma dxdy}{r^2}\frac{\bar{r}}{|r|} = k\frac{2(x^2+y^2+9)^{3/2}10^{-9}dx\,dy}{x^2+y^2+9}\frac{(-x\hat{x}-y\hat{y}+3\hat{z})}{\sqrt{x^2+y^2+9}} = 2k(-x\hat{x} - y\hat{y} + 3\hat{z})10^{-9}dx\,dy$

Integrando il dE su tutta la superficie si ha il campo totale, l'integrale può essere eseguito solo sulla componente z, le altre essendo nulle per simmetria:

$$\bar{E} = \iint_{-2}^{2} 2k(-x\hat{x} - y\hat{y} + 3\hat{z})10^{-9}dx\,dy = 18\iint_{-2}^{2} 3\hat{z}dx\,dy = 54\cdot 16\,\hat{z} = 864\,\hat{z}\ {}^{V}/_{m}$$

Esercizio n.2 [10 punti]

Trovare la differenza di potenziale attraverso i due dielettrici del condensatore mostrato in figura, in cui $\varepsilon_{r1} = 2$ e $\varepsilon_{r2} = 5$. Il conduttore interno si trova a $r_1 = 2$ cm, mentre quello esterno a $r_2 = 2{,}5$ cm, con l'interfaccia fra i due dielettrici a metà strada fra i due. Il condensatore ha ai suoi capi un generatore di f.e.m. V=100 Volt.
[Il valore numerico di α è inessenziale]



Soluzione

La capacità del condensatore considerato è una frazione $\alpha/2\pi$ del condensatore cilindrico corrispondente, e così anche quella equivalente dei due condensatori in serie di costanti dielettriche ε_{r1} e ε_{r2}.

Si ha quindi: $C_{1,2} = C_{12}(\text{del cilindro}) \cdot \frac{\alpha}{2\pi}$ dove $C_{cilindro} = 2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 h/ln\frac{R_{ext}}{R_{int}}$

Sia rm=(r1+r2)/2 il raggio medio dove c'è l'interfaccia fra i due materiali.

Quindi: $C_{cil1} = \frac{2\pi\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 h}{\ln\frac{rm}{r1}} = 2\pi\varepsilon_0 h \cdot 16{,}98\ F$ e: $C_{cil2} = \frac{2\pi\varepsilon_{r2}\varepsilon_0 h}{\ln\frac{r2}{rm}} = 2\pi\varepsilon_0 h \cdot 47{,}46\ F$

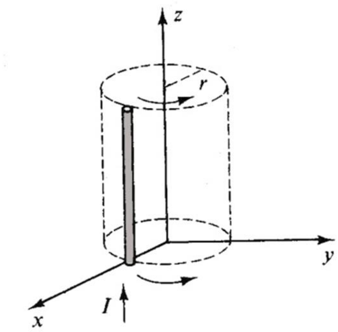
Le due capacità saranno: $C_1 \cong \varepsilon_0 h\ \alpha\ \cdot 17$ e $C_2 \cong \varepsilon_0 h\ \alpha\ \cdot 47$

Da cui, scrivendo: $V = V_1 + V_2$ e $C_1 V_1 = C_2 V_2$ si ha: $V_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} V \cong 73\ V$ e $V_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} V \cong 27\ V$

La differenza di potenziale è la stessa che si avrebbe se il condensatore fosse circolare.

Esercizio n.3 [10 punti]

Trovare il lavoro e la potenza necessari per muovere il conduttore mostrato in figura (una sbarretta conduttrice) di un giro completo nella direzione positiva ad una frequenza rotazionale di *N giri/minuto*. Il conduttore è alto h e si muove su di una circonferenza di raggio *r*.
Il sistema si trova in un campo di induzione magnetica $\bar{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{\varrho}}$ (in coordinate cilindriche), ed è attraversato da una corrente costante *I*.



Dati: h=10 cm ; r= 2 cm ; I=2 A ; N = 20 giri/minuto ; B= 3/π T

Soluzione

La forza sulla sbarretta dovuta all'interazione fra il campo B e la corrente è:

$\bar{F}_B = I\ \bar{h} \times \bar{B} = I\ h\ \hat{z} \times B\hat{\rho} = IhB\hat{\varphi}$ avendo indicato con $\hat{\rho}, \hat{z}, \hat{\varphi}$ i versori in coordinate cilindriche.

La forza necessaria per muovere la sbarretta sarà F=-F_B . Il lavoro e la potenza corrispondenti ad un giro:

$$L(1\,\text{giro}) = \oint \bar{F} \cdot \overline{dl} = \oint \bar{F}\ r d\varphi \cdot \hat{\varphi} = -IhBr \cdot 2\pi = -2 \cdot 0{,}1 \cdot \frac{3}{\pi} 2\ 10^{-2} \cdot 2\pi = -24\ mJ$$

$$P(1\,\text{giro}) = \frac{L(1\,\text{giro})}{t(1\,\text{giro})} = \frac{-24\ 10^{-3}\ J}{60\ s/20} = -\ 8\ mW$$

Sia il lavoro che la potenza sono negativi, infatti si può ricavare energia e potenza dal sistema, che vengono forniti dalla corrente I.